Devoir Maison n°3

pour le lundi 28/09/2009

Exercice 1

Soit a un réel positif ou nul. On considère la suite $u = (u_n)_{n\geq 1}$ telle que $u_1 = a$ et définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{\sqrt{n}}$.

1. Montrer qu'il existe une unique valeur de a pour laquelle la suite u est constante. Déterminer cette valeur.
2. On suppose que la suite u converge vers une limite finie ℓ. Montrer que $\ell = 0$.
3. On suppose que la suite u vérifie la propriété :
$$\forall n \geq 1,\ u_n \geq \sqrt{n}.$$
Montrer que u est une suite croissante qui tend vers $+\infty$.
4. On suppose que la suite u vérifie la propriété
$\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $u_k < \sqrt{k} \quad (*)$
   (a) Montrer que $u_n < \sqrt{n},\ \forall n \geq k$.
   (b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq k}$ est décroissante.
   (c) Que peut-on en déduire pour la suite u ?
5. Exprimer u, en fonction de a et de n, pour tout entier naturel n. *(on pourra exprimer $\ln u_{n+1}$ en fonction de $\ln u_n$)*
6. Dans cette question, on considère de plus la série de terme général $w_n = \dfrac{1}{2^{n+1}} \ln(n+1)$.
   (a) Montrer que cette série est convergente.
   (b) Montrer que la suite u est convergente si et seulement si il existe un entier $k > 2$ tel que $u_k < 1$.
   (c) En déduire que la suite u est convergente si et seulement si $a < \exp(W/2)$, où W désigne la somme de la série de terme général w_n.

Problème 1

Dans ce problème, $\mathbb{R}[X]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}_n[X]$ est le sous-espace de $\mathbb{R}[X]$ formé des polynômes de degré $\leq n$.

On considère l'application $D : \begin{array}{l} \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X] \\ P \to P(X+1) - P(X) \end{array}$.

Première partie

On admet que D est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

1. (a) Montrer que si $P \in \operatorname{Ker} D$ alors, pour tout entier $n \geq 0$, $P(n) = P(0)$.
   (b) Montrer alors que $\operatorname{Ker} D = \mathbb{R}_0[X]$.
2. (a) Si P n'est pas un polynôme constant, préciser le degré de $D(P)$ en fonction de celui de P, ainsi que le coefficient dominant de $D(P)$ en fonction de celui de P.
   (b) En déduire que $D(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$, si $n \geq 1$, et que le sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par D.
3. Soit n un entier ≥ 1 ; on note D_n l'endomorphisme induit par D sur $\mathbb{R}_n[X]$. Déterminer $\operatorname{Ker} D_n$ et montrer que $\operatorname{Im} D_n = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
4. Montrer que l'endomorphisme D est surjectif.
5. (a) On considère $F = \{P \in \mathbb{R}[X] / P(0) = 0\}$. Vérifier que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ et que $\mathbb{R}[X] = F \oplus \operatorname{Ker} D$.
   (b) Conclure que, pour tout polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$, il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(0) = 0$ et que $D(P) = Q$; préciser le degré de P en fonction de celui de Q.

Deuxième partie

1. Montrer qu'il existe une unique suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant $P_0 = 1$ et pour tout entier $n \geq 1$, $P_n(0) = 0$ et $P_{n-1} = D(P_n)$.
2. Expliciter P_1 et P_2.
3. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$,
$P_n = \dfrac{X(X-1)\cdots(X-n+1)}{n!}$.
4. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, la famille $(P_0, \cdots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

La suite du devoir est facultative

5. Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, montrer que l'on obtient les coordonnées de P dans la base $(P_0, \cdots, P_n)$ par une succession de divisions euclidiennes.
6. Expliciter alors les monômes X^2 et X^3 comme combinaisons linéaires de $P_0,\ P_1,\ P_2,\ P_3$.
7. **Application**
Pour tout couple d'entiers (n,p) d'entiers positifs non nuls, on pose $S_{n,p} = 1^n + 2^n + \cdots + p^n$.
   (a) Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, il existe un polynôme $A_n \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$ tel que $A_n(0) = 0$ et $D(A_n) = X^n$.
   (b) En revenant à la définition de D, montrer que $S_{n,p} = A_n(p+1)$.
   (c) Si $X^n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k P_k$, justifier que $A_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k P_{k+1}$.
   (d) Déterminer les valeurs de A_2 et A_3.
   (e) Donner, alors, sous forme factorisée, les valeurs de $S_{2,p}$ et $S_{3,p}$.