Devoir Maison n°4

pour le mardi 13/10/2009

Exercice 1

Calculs de déterminants.

1. Déterminant d_p.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $p \in [\![0, n]\!]$, on note $A_p = (a_{i,j})$ la matrice carrée de $\mathcal{M}_{n-p+1}(\mathbb{R})$ dont le coefficient de la ligne i et de la colonne j est égal à $a_{i,j} = \binom{p+i+j-2}{p+i-1}$ avec $(i,j) \in [\![1, n-p+1]\!] \times [\![1, n-p+1]\!]$. On note $d_p = \det(A_p)$.

1.1. Expliciter les entiers r et s tels que $a_{i,j} = \binom{r}{s}$ pour les quatre coefficients $a_{1,1}, a_{1,n-p+1}$, $a_{n-p+1,1}$ et $a_{n-p+1,n-p+1}$.

1.2. Pour tout entier naturel $n \geq 2$ calculer les déterminants d_n, d_{n-1} et d_{n-2}.

1.3. On suppose que la matrice A_p possède au moins deux lignes. On note L_i la ligne d'indice i.

1.3.1 Dans le calcul de d_p on effectue les opérations suivantes : pour i variant de $n-p+1$ à 2, on retranche la ligne L_{i-1} à la ligne L_i (opération codée $L_i \leftarrow L_i - L_{i-1}$). Déterminer le coefficient d'indice (i,j) de la nouvelle ligne L_i.

1.3.2 En déduire une relation entre d_p et d_{p+1}, puis en déduire d_p.

2. Déterminants D_n et Δ_n.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note D_n le déterminant de la matrice carrée de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ dont le coefficient de la ligne i et de la colonne j est $(i+j)!$, **les lignes et les colonnes étant indexées de 0 à n.**

On note $D_n = \det((i+j)!)$. Avec les mêmes notations, on note $\Delta_n = \det\left(\binom{i+j}{i}\right)$ pour $(i,j) \in [\![0, n]\!] \times [\![0, n]\!]$.

2.1. Calculer les déterminants D_0, D_1, D_2, Δ_0, Δ_1 et Δ_2.

2.2. Donner une relation entre D_n et Δ_n.

2.3. En déduire Δ_n puis D_n.

Problème 1

On désigne par $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, et par $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n, pour tout entier naturel n.

Soit (T_n) la suite de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ définie par $T_0(X) = 1$, $T_1(X) = X$, puis la relation :

$$\forall n \geq 1,\ T_{n+1}(X) = 2XT_n(X) - T_{n-1}(X).$$

Partie I

Etude de la suite de polynômes (T_n)

I.1 Déterminer les polynômes T_2 et T_3.

I.2 Déterminer le degré, la parité et le coefficient dominant de T_m pour $m \in \mathbb{N}$.

I.3 Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la famille $(T_0, T_1, \ldots, T_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

I.4 a) Etablir par récurrence les relations suivantes pour tout réel x :
$T_n(\cos x) = \cos(nx)$; $T_n(\operatorname{ch} x) = \operatorname{ch}(nx)$.
On rappelle que $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ 2\operatorname{ch}(a)\operatorname{ch}(b) = \operatorname{ch}(a+b) + \operatorname{ch}(a-b)$

b) En déduire que $|T_n(u)| \leq 1$ pour $|u| \leq 1$.

c) Soit n un entier ≥ 1. Montrer que, pour tout u sans $]1, +\infty[$, $|T_n(u)| > 1$. (on pourra poser $u = \operatorname{ch} x$)

d) En déduire que, pour tout n un entier ≥ 1 et pour tout u dans $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$, $|T_n(u)| > 1$.

I.5 a) Pour tout n un entier ≥ 1, résoudre dans $[0, \pi]$ l'équation $T_n(\cos(x)) = 0$.

b) En déduire que, pour tout n un entier ≥ 1, T_n a n racines réelles dans $[-1, 1]$.

c) Soit n un entier ≥ 1. Donner la décomposition de T_n en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

I.6 Etablir la convergence et calculer la somme des séries suivantes pour $|t| < 1$ et x réel : $\sum_{n=0}^{+\infty} t^n\, e^{inx}$; $\sum_{n=0}^{+\infty} t^n \cos nx$; $\sum_{n=0}^{+\infty} t^n \sin nx$.

Dans toute la suite, on désigne par n un entier naturel non nul et les n racines de $T - n$ par $\cos(x_1), \ldots, \cos(x_n)$, où $x_k = \dfrac{2k-1}{2n}\pi$, $k \in [\![1, n]\!]$

Partie II.A
Etude d'un "produit scalaire" sur $\mathbb{R}[X]$.

II.A.1) On associe à tout couple (P, Q) de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ l'intégrale suivante :

$$< P, Q >= \int_0^{\pi} P(\cos x)Q(\cos x)\mathrm{d}x.$$

Montrer que l'application $(P, Q) \mapsto < P, Q >$ est une forme :
bilinéaire,
symétrique ($\forall P, Q \ \ < P, Q >=< Q, P >$),
positive ($\forall P, < P, P >\geq 0$) et
définie ($\forall P, < P, P >= 0 \Rightarrow P = 0$).
On dira alors que cette application est un "produit scalaire".

II.A.2) a) Soient $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $p \neq q$. Calculer $< T_p, T_q >$.

b) Calculer $< T_0, T_0 >$, et $< T_n, T_n >$pour $n \geq 1$.

c) En déduire que pour tout $n \geq 1$ et tout $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $< T_n, P >= 0$.
On dira que T_n est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.(on pourra utiliser une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ bien choisie)

d) En utilisant les question I.2), II.A.2.b) et II.A.2.c), montrer que $< T_n, X^n >= \dfrac{\pi}{2^n}$.
(on pourra faire la division euclidienne de T_n par X^n lorsque $n \geq 1$)

II.A.3 Montrer que la famille $(T_0, T_1, ..., T_n)$ est base de $\mathbb{R}_n[X]$ telle que $< T_p, T_q >= 0$ si $p \neq q$.

Partie II.B
Calcul exact d'une intégrale

On associe à tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ l'intégrale et la somme suivantes :
$I(P) = \displaystyle\int_0^{\pi} P(\cos x)\mathrm{d}x$ et $S_n = \dfrac{\pi}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(\cos(x_k))$.

II.B.1 On note pour $j \in [\![0, n]\!]$, $c_j = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(jx_k)$.

a) Calculer c_0

b) Calculer pour $j \in [\![1, n-1]\!]$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (\mathrm{e}^{ij\frac{\pi}{n}})^k$.

c) En déduire que, pour $j \in [\![1, n-1]\!]$, $c_j = 0$.

II.B.2 a) Pour $p \in [\![0, n-1]\!]$, calculer $I(T_p) =< T_p, T_0 >$ et $S_n(T_p)$.

b) En déduire que, pour tout P dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, $I(P) = S_n(P)$.

II.B.3 Soit P un polynôme de $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$. On note Q et R respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de P par T_n ; On a donc $P = QT_n + R$ où $R \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Montrer que $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

a)b) En déduire en utilisant II.A.2.c) que $I(P) = I(R)$.

c) En déduire qu, pour $P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$, $I(P) = S_n(P)$.

II.B.4 Calculer $I(T_{2n})$ et $S_n(T_{2n})$L'identité $I(P) = S_n(P)$ est-elle vérifié pour tout polynôme de degré $2n$?

Partie III
Calcul approché d'une intégrale

On associe à toute fonction continue $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ l'intégrale et la somme suivantes :
$I(f) = \displaystyle\int_0^{\pi} f(\cos x)\mathrm{d}x$; $S_n(f) = \dfrac{\pi}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(\cos(x_k))$.

III.1 On admet le théorème sur les sommes de Riemann :
Théorème :
Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ ($a < b$). Soit p un entier naturel non nul. On pose pour $k \in [\![0, p-1]\!]$, $\alpha_k = a + k\dfrac{b-a}{p}$. Alors, pour tous $c_0, \ldots, c_{p-1}$ tels que $\forall k \in [\![0, p-1]\!]$, $c_k \in [\alpha_k, \alpha_{k+1}]$, on a : $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} \frac{b-a}{p}\sum_{k=0}^{p-1} f(c_k) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.
Démontrer que $\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty} S_n(f) = I(f)$.

III.2 On suppose que f est l'application définie par $f(t) = \ln(a^2 - 2at + 1)$, où a est un réel tel que $a > 0$ et $a \neq 1$.

a) Montrer que f est continue sur $[-1, 1]$, et en déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n(f) = I(f)$.

b) i. Exprimer les racines $(2n)^{\text{èmes}}$ de -1 dans $\mathbb{C}$ en fonction de $x_1, \ldots, x_n$.
(on pourra les classer par conjugués)

ii. Donner la factorisation en irréductibles de $X^{2n} + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$.

iii. En déduire que la factorisation en irréductibles de $X^{2n} + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$ est :

$$X^{2n} + 1 = \prod_{k=1}^{n} (X^2 - 2\cos(x_k)X + 1).$$

iv. Montrer que $S_n(f) = \dfrac{\pi}{n}\ln(a^{2n} + 1)$.

c) Donner la limite de $\dfrac{\pi}{n}\ln(a^{2n} + 1)$ quand n tend vers $+\infty$.* (on distinguera les cas $a \in]0, 1[$ et $a > 1$).
En déduire la valeur $I(f)$ selon la valeur de a.

d) Donner un équivalent de $S_n(f) - I(f)$ quand n tend vers $+\infty$, en distinguant les cas $a \in]0, 1[$ et $a > 1$.