

Chapitre 1 : **Espaces vectoriels ; applications linéaires**

I. Applications directes du cours

Exercice 1

Dans chaque cas, on se donne un \mathbb{C} -espace vectoriel et l'on demande de trouver une famille libre et génératrice.
 $E_1 = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. $E_2 = \mathbb{C}[X]$. $E_3 = (X^2 + X + 1)\mathbb{C}[X]$.

Exercice 2

Pour chacune des familles de fonctions suivantes sur $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, étudier la liberté.

1. $(x \mapsto \cos(x + k))_{0 \leq k \leq n}$;
2. $(x \mapsto |x - a_i|)_{1 \leq i \leq n}$, pour $(a_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n$ deux à deux distincts.
3. $(x \mapsto e^{a_i x})_{1 \leq i \leq n}$, pour $(a_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n$ deux à deux distincts.

(on pourra utiliser les valeurs prises en différents points, les limites, continuité, intégration, dérivation)

Exercice 3

Montrer que la famille $\mathcal{F} = (\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions définies par $\forall n, \varphi_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \cos(nx)$ est une famille libre de l'espace vectoriel

$\mathcal{C}_{2\pi} = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \forall x \in \mathbb{R}, f(x + 2\pi) = f(x)\}$. A l'aide de la fonction sin, montrer que \mathcal{F} n'est pas génératrice de $\mathcal{C}_{2\pi}$.

Exercice 4

Dans chaque situation, on se donne un \mathbb{R} -espace vectoriel E et deux sous-espaces vectoriels F et G , et l'on demande si $E = F \oplus G$.

1. $E = \mathbb{R}^3, F = \text{Vect}((1; 1; 0), (0; 0; 1)), G = \text{Vect}((1; 1; 1))$
2. $E = \mathbb{R}^3, F = \text{Vect}((1; 1; 0), (0; 0; 1)), G = \text{Vect}((1; 0; 0))$
3. (suites réelles) $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, F = \text{Vect}((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}, G = \text{Vect}((-1)^{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$
4. (fonctions) $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), F = \{f \in E; \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(-x)\}, G = \{f \in E; \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -f(-x)\}$

5. $E = \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), F = \{A \in E; {}^t A = A\}, G = \{A \in E; {}^t A = -A\}$.

Exercice 5

Notons $E = \mathbb{R}[X]$. Soit $P = X^3 + 3X^2 + 3X + 1$.

1. Justifier que $F = \mathbb{R}[X]P$ (multiples de P) est un sous-espace vectoriel de E .
2. On considère l'application $f : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$ qui à tout polynôme Q associe son reste dans la division euclidienne par P .
 - (a) Rappeler le théorème de la division euclidienne dans $\mathbb{R}[X]$.
 - (b) Montrer que f est une application linéaire.
 - (c) Déterminer l'image et le noyau de f .
3. Soit $G = \mathbb{R}_2[X]$. Justifier que F et G sont des s.e.v. supplémentaires de E .

Exercice 6

Soient (e_1, e_2, e_3) une base de E , et ψ un endomorphisme de E , tel que $\psi(e_1) = -\sqrt{2}e_1 + e_3, \psi(e_2) = \sqrt{2}e_1 + e_3$ et $\psi(e_3) = e_1 + e_2$.

1. Déterminer $A = \text{Ker } \psi, B = \text{Im } \psi, C = \text{Ker}(\psi + \sqrt{2}\text{Id}_E)$ et $D = \text{Ker}(\psi - \sqrt{2}\text{Id}_E)$
2. Prouver que $\text{Im } \psi = C \oplus D$ et $E = \text{Im } \psi \oplus \text{Ker } \psi$. ψ est-il un projecteur ?

Exercice 7

(polynômes d'interpolation de Lagrange) Donner un polynôme réel P de degré au plus 2 tel que $P(-2) = 3, P(0) = \pi$ et $P(1) = 1$. Est-il unique ?

Exercice 8

Résoudre :

$$S_1 \begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 & = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 & = 11 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 & = 11 \end{cases}, S_2 \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 & = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 & = -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 & = -2 \end{cases}$$

II. Exercices

Exercice 9

Soit V l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus égal à 2. On considère l'application f qui à un polynôme P associe le polynôme $Q = f(P)$ défini par : $Q(X) = 2(X + 1)P(X) - (X + 1)^2 P'(X)$

1. Montrer que f est un endomorphisme de V .
2. Donner les images par f des polynômes

$1, X, X^2, X + 1, (X + 1)^2$

3. Donner une base de $\text{Im } f$ et $\text{Ker } f$.

Exercice 10

Prouver qu'il existe une seule application linéaire v de \mathbb{R}^3 vers \mathbb{R}^4 telle que $\text{Ker } v$ soit engendré par $(1, 1, 2)$ et $(1, 2, 0)$ et telle que $v(1, 1, 1) = (1, 1, 0, -1)$. Quelle est sa matrice dans les bases canoniques de \mathbb{R}^3 et de \mathbb{R}^4 ?

Exercice 11

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et f qui à tout P de E associe $(X - 1)P' + 2P''$; f est-elle un endomorphisme de E ? si oui quelle est sa matrice dans la base canonique de E ? f est-elle injective, surjective, bijective? si oui caractériser par sa matrice dans la base canonique de E l'application f^{-1} ; si non déterminer les noyau et image de f .

Exercice 12

Soit E \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie 3, et f endomorphisme de E tel que $f^3 = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $f^2 \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$. Démontrer que :

$$\{g \in \mathcal{L}(E); g \circ f = f \circ g\} = \text{Vect}(Id_E, f, f^2)$$

(on pourra prouver qu'il existe u appartenant à E tel que $(u, f(u), f^2(u))$ est libre et chercher les matrices des endomorphismes de E dans cette base).

Exercice 13

Soient f, g endomorphismes de E tels que $f \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)}$, et $g \circ f + f \circ g = id_E$, prouver que $\text{Im } f = \text{Ker } f$.

Exercice 14

Soit g_n l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ vers $\mathbb{R}_n[X]$ qui à tout P de $\mathbb{R}_n[X]$ associe $P + P' + P''$, démontrer que g_n est injective, en déduire qu'elle est surjective et bijective.

Exercice 15

On note E^* l'ensemble des formes linéaires sur E . Soient α et β formes linéaires non proportionnelles sur E , démontrer que $\text{Vect}(\alpha, \beta)$ est égal à

$$W = \{\varphi; \varphi \in E^* \text{ et } \forall x \in \text{Ker } \alpha \cap \text{Ker } \beta, \varphi(x) = 0_{\mathbb{K}}\}.$$

Exercice 16

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$. On note E^* l'ensemble des formes linéaires sur E . On considère la famille de formes linéaires $\mathcal{B} = (\varphi_k)_{0 \leq k \leq 3}$ telles que, $\forall P \in E; \varphi_k(P) = \int_{-1}^1 x^k P(x) dx$; démontrer que \mathcal{B} est une base de E^* , trouver une base (e_j) de E telle que $\varphi_k(e_j) = \delta_j^k$.

III. Pour aller plus loin

Exercice 22

Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ calculer J^2 , en déduire que J est inversible, calcule J^{-1} , pour a, b complexes et $M = aJ + bI_3$, calculer M^n (on pourra étudier le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - X - 2$).

Exercice 23

Soient p et q projecteurs de E ; prouver

- $\text{Ker } p = \text{Ker } q \Leftrightarrow p = poq$ et $q = qop$
- que si $poq = qop$ alors $\text{Im}(poq) = \text{Im } p \cap \text{Im } q$ et $\text{Ker}(poq) = \text{Ker } p + \text{Ker } q$.
- que si $p + q$ est un projecteur alors $\text{Im } p \cap \text{Im } q = \{0_E\}$ et $\text{Ker } p \cap \text{Ker } q = \text{Ker}(p + q)$.

Exercice 17

Soit E un espace-vectoriel.

- Démontrer que tout projecteur p de E commute avec tout endomorphisme f de E tel que : $f(\text{Im } p) \subset \text{Im } p$ et $f(\text{Ker } p) \subset \text{Ker } p$;
- p et q étant deux projecteurs de E , à quelle condition nécessaire et suffisante $p + q$ est-il un projecteur de E ?

Exercice 18

Soient u et v endomorphismes de E de dimension finie n tels que $u \circ v = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $v + u$ soit inversible, démontrer que $\text{rg}(u) + \text{rg}(v) = n$ et $\text{Ker } u = \text{Im } v$.

Exercice 19

Dans $E = \mathbb{R}_2[X]$, soit $(U, V, W) = (1, 1 + X, 1 - X^2) \in E^3$, et $f : P \mapsto (4 - X^2)P' + 2XP$ prouver que :

- (U, V, W) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$;
- f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$;
- donner une base de $\text{Ker } f$ et une base de $\text{Im } f$;
- Soit $g = Id - f$, déterminer $\text{Ker } g$
- En déduire les solutions dans E de : $(4 - x^2)y' + (2x - 1)y = 0$.

Exercice 20

Discuter selon les réels a, b, c l'existence et l'unicité des

$$\text{solutions } x, y, z \text{ réelles de } \begin{cases} 2x + y + z = a \\ x + 2y + az = b \\ x + y + az = c \end{cases}$$

Exercice 21

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, démontrer que l'application qui à tout M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associe $\text{Tr}(AM)$ est une forme linéaire; réciproquement démontrer que pour toute forme linéaire φ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ il existe une unique matrice A telle que pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Exercice 24

Soient A, B sous-espaces vectoriels de E , g application linéaire de E vers F

- Comparer pour l'inclusion $g(A + B)$ et $g(A) + g(B)$
- Si $A + B$ est directe en est-il de même pour $g(A) + g(B)$?
- si $g \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ prouver l'équivalence : $(g \text{ est injective}) \Leftrightarrow$ (Pour tous A, B de sous-espaces-vectoriels de E , si $A + B$ est directe alors $g(A) + g(B)$ est directe)

Exercice 25

Soit f un endomorphisme de E tel que $f^3 = Id_E$, et pour a réel et y vecteur de E fixés résoudre l'équation d'inconnue le vecteur x de E : $x + af(x) = y$