

Séries de Fourier

I. Applications directes du cours

Exercice 1

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Justifier que la fonction $\varphi_\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

$$t \mapsto e^{i\lambda t}$$
est définie et dérivable sur \mathbb{R} .
Donner l'expression de sa dérivée en tout point.

- Soient $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$, $e_p : t \mapsto e^{ipt}$, et $e_q : t \mapsto e^{iqt}$.

Calculer $J_p = \int_0^{2\pi} e_p(t) dt$, $I_{p,q} = \int_0^{2\pi} \overline{e_p(t)} e_q(t) dt$.

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction 2π -périodique définie pour $] -\pi, \pi[$ par la formule

$$f(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } t \in]-\pi, 0] \\ 1 & \text{si } t \in]0, \pi[\end{cases}$$

- Tracer le graphe de f .
- A l'aide d'une subdivision $(\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2)$ adaptée, justifier que f appartient à l'ensemble $\mathcal{CM}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
- Quelle est la parité de f ?
- Déterminer les suites coefficients de Fourier trigonométriques $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 1}$. (avec $\frac{a_0}{2} = c_0(f)$)
- Déterminer la suite $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ des coefficients de Fourier (complexes) de f .

Exercice 3

Démontrer que pour tout $t \in]-\pi; \pi[$:

$$t^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4(-1)^n \cos(nt)}{n^2}; \quad (*)$$

$$t = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sin(nt)}{n};$$

II. A savoir rédiger

Exercice 4

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 2π -périodique, définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi - x}{2} & \text{si } x \in]0, 2\pi[\\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

- Tracer le graphe de f sur $[-4\pi, 4\pi]$.
- Justifier que f est continue par morceaux et 2π -périodique.
- Etudier la parité de f .
- Justifier que f est la somme de sa série de Fourier en tout point de \mathbb{R} .
- Déterminer les coefficients de Fourier trigonométriques de f .

- En déduire les valeurs de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Exercice 5

Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction 2π -périodique définie pour $] -\pi, \pi[$ par la formule $g(t) = t$.

- Tracer le graphe de g .
- Quelle est la parité de g ?
- Déterminer la suite $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ des coefficients de Fourier (complexes) de g .
- Déterminer les suites coefficients de Fourier trigonométriques $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 1}$.
- En utilisant la formule de Parseval, en déduire que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

III. Exercices

Exercice 6

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto \frac{1}{2 - e^{it}}$.

- Déterminer la suite $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ des coefficients de Fourier (complexes) de f .
- Justifier la convergence normale sur \mathbb{R} de sa série de Fourier.

(on pourra utiliser le DSE sur $]-2, 2[$ de $u \mapsto \frac{1}{2-u}$)

Exercice 7

Soit $a \in]-1, 1[$. En utilisant le développement en série entière de $\frac{1}{1-z}$ pour $|z| < 1$, calculer (en justifiant) pour tout $x \in \mathbb{R}$

la somme $f(x) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} a^n \cos(nx)$;

En déduire, pour tout réel α tel que $|\cos \alpha| \neq 1$, la série de Fourier de la fonction $g : x \mapsto \frac{1}{1 - \cos \alpha \cos x}$.

Exercice 8

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{2\alpha \cos x} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha^{2n}}{(n!)^2}.$$

(on pourra utiliser la formule de Parseval pour une fonction f bien choisie)

Exercice 9

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} et 2π -périodique.

- Exprimer les coefficients de Fourier $(c_n(f'))_{n \in \mathbb{Z}}$ de f' et $(c_n(f''))_{n \in \mathbb{Z}}$ de f'' à l'aide des coefficients de Fourier $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de f .
- A l'aide de la formule de Parseval, exprimer $\int_0^{2\pi} |f|^2$, $\int_0^{2\pi} |f'|^2$ et $\int_0^{2\pi} |f''|^2$ en fonction des $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$.
- En déduire que $\int_0^{2\pi} |f|^2 + \int_0^{2\pi} |f'|^2 \geq 2 \int_0^{2\pi} |f''|^2$

Exercice 10

Soit f une fonction 2π -périodique de \mathbb{R} vers \mathbb{C} , de classe \mathcal{C}^1 par morceaux et $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n e^{in \cdot}$ sa série de Fourier; on se propose de rechercher les solutions 2π -périodique de \mathbb{R} vers \mathbb{C} , de l'équation différentielle :

$$(E) \quad y'' + y' + y = f(t)$$

sous la forme $y : t \mapsto \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{int}$

- En admettant que la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} n^2 |c_n|$ converge, prouver que y est deux fois dérivable, et en reportant dans (E), trouver c_n en fonction de n .
- Prouver que (E) admet une solution unique 2π -périodique y et pour tout t , exprimer $y(t)$ comme somme d'une série de Fourier normalement convergente.
- Application :
 - avec $f : t \mapsto \max(\sin t, 0)$.
 - avec une méthode analogue, rechercher les solutions 2π -périodiques de \mathbb{R} vers \mathbb{C} , de l'équation différentielle : (E) $y'' + e^{it} y = 0$

IV. Pour aller plus loin**Exercice 11**

- Pour $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, prouver que $\frac{\sin((2n+1)x)}{\sin x} = \sum_{k=-n}^n e^{ikx}$.
- Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin((2n+1)x)}{\sin x} dx$ converge;
- Développer en série de Fourier la fonction g , 2π -périodique définie sur $[0, 2\pi]$, par l'expression : $g(t) = e^{-at/2}$.
- Prouver que $I_n = \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{k=-n}^n \int_{2p\pi}^{(2p+2)\pi} e^{ikt-at/2} dt$, et $I_n = \frac{\pi S_n}{1 - e^{-a\pi}}$, où $S_n = \sum_{k=-n}^n c_n(g)$.
- En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

Exercice 12

Soit $x \in \mathbb{R}$. Justifier que pour $n = \mathbb{E}\left(\frac{x + \pi}{2\pi}\right)$, on a $-\pi \leq x - 2\pi n < \pi$.

Exercice 13

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-|x+2n\pi|}$.

- Etudier la fonction f : ensemble de définition, périodicité, continuité.
- Montrer que f est développable en série de Fourier.
- Calculer les coefficients de Fourier de f , et donner le développement en série de Fourier réelle de f en tout point.

Exercice 14

Soit $z \in \mathbb{C}^*$, tel que $|z| < 1$.

Montrer que la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} z^n$ diverge.

(on pourra calculer la somme partielle $S_N = \sum_{n=-N}^N z^n$, pour $N \in \mathbb{N}$ et faire tendre N vers $+\infty$).