Chapitre 6 : **Séries entières**

I. Applications directes du cours

Exercice 1

Donner le rayon de convergence des séries entières :
a) $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{2^n}z^n$; b) $\sum_{n\geq 0}(n-1)z^n$; c) $\sum_{n\geq 0}3^nz^n$; d) $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n^3}z^n$;

II. Exercices

Exercice 2

Déterminer le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geq 0}a_n$, avec :
a) $a_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$; b) $a_n=\frac{n^n}{n!}$; c) $a_n=\frac{\ln n}{\ln n+n+1}$;
d)$a_n=\ln(\frac{1+n^2}{n^2})$; e) $a_n=\begin{cases}2^n \text{ si } n \text{ pair}\\ \frac{1}{3^n} \text{ si } n \text{ impair}\end{cases}$;
f) $a_n=\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+3)}$; g) $a_n=\frac{e^{in\theta}}{n}$, pour $\theta\in\mathbb{R}$ fixé ;

Exercice 3

Développer en série entière sur un voisinage de l'origine $]-a,a[$, les fonctions suivantes : a) $f:x\mapsto(\operatorname{Arcsin}x)^2$ b) $g:x\mapsto\frac{1}{1+x+x^2}$.

Exercice 4

Notons $H_0=1$, et pour tout $k\in\mathbb{N}^*$,
$H_k=\frac{X(X-1)\dots(X-k+1)}{k!}\in\mathbb{R}[X]$.
1) Pour $k\geq 0$ entier fixé, terminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0}H_k(n)z^n$, et calculer la somme de cette série entière en tout point du disque ouvert de convergence.
2) Soit $n\in\mathbb{N}$. Justifier (en une ligne) que $(H_0,\dots,H_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
3) En déduire le rayon de convergence et la somme de la série $\sum_{n\geq 0}(n^3+2n+1)z^n$.

Exercice 5

Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série $\sum_{n\geq 0}\frac{n^3+2n+1}{n!}z^n$.

Exercice 6

Montrer que la fonction $f:x\mapsto\frac{\operatorname{sh}(5x)}{\operatorname{sh}x}$ est DSE sur un intervalle ouvert centré en 0, et donner son rayon de convergence.

Exercice 7

Soient $\sum_{n\geq 0}a_nz^n$ et $\sum_{n\geq 0}b_nz^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R et R', justifier que :
1) s'il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que : $\forall n\geq N,\ |a_n|\leq|b_n|$, alors $R'\leq R$.
2) a) comparer R etR' lorsque $a_n\underset{n\to+\infty}{\sim}b_n$;
b) montrer que $\sum_{n\geq 0}a_nb_nz^n$ a un rayon de convergence R" tel que $R"\geq RR'$;
c) montrer que le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 0}a_n^3z^n$ est R^3 ;
d) montrer que le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 0}a_nz^{2n}$ est $\sqrt{R}$;

Exercice 8

Pour a réel positif non nul étudier la convergence sur $]-1,1[$ de $\sum_{n\geq 0}(-1)^nx^{an}$; donner un majorant de la valeur absolue du reste d'ordre N sur $[0,1]$ et prouver que
$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x^a}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{1+an}$.

Exercice 9

Montrer que pour tout $z\in\mathbb{C}$, $|\cos z|\leq\operatorname{ch}|z|$.

Exercice 10

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $\sin x=\operatorname{sh}x$.

III. Pour aller plus loin

Exercice 11

1) Rappeler l'expression des dérivées des fonctions Arctan et Argth.
2) En déduire que ces deux fonctions sont développables en série entière sur $]-1,1[$, et donner leur expressions sommatoires.
3)Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière réelle $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{4n^2-1}$.

Exercice 12

Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum_{n\geq 0} u_n z^n$, où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^1 \frac{t(t-1)\dots(t-n+1)}{n!} \mathrm{d}t$

Exercice 13

Trouver la solution F développable en série entière au voisinage de 0 de l'équation différentielle $xy" + 3y' - 4x^3 y = 0$, vérifiant la condition initiale $F(0) = 1$.

Exercice 14

Soient a_0 et b_0 deux éléments de $\mathbb{C}$. On définit deux suites (a_n) et (b_n) en posant, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $4a_{n+1} = a_n + 3b_n$ et $4b_{n+1} = 12a_n + b_n$.
Déterminer rayon de convergence et somme des séries $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$.

Exercice 15

Trouver le rayon de convergence de la série entière réelle $\sum_{n\geq 0} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$ et sa somme en cherchant une équation différentielle du 3e ordre qu'elle vérifie.

Exercice 16

Soit $R > 0$, et $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série enrière de rayon de convergence R. On suppose que $\sum_{n\geq 0} |a_n| R^n$ converge. Montrer que $S : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est définie et continue sur le disque fermé $D_f(0, R)$.