# *Chapitre 4 :* Suites et séries de fonctions

## I. Applications directes du cours

**Exercice 1**

Soit $A > 0$, et $I = [0, A] \subset \mathbb{R}^+$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : I \to \mathbb{R},\ x \mapsto \ln(1 + \frac{x}{n})$.

1. En utilisant l'inégalité $0 \leq \ln(1+u) \leq u$ valable sur $\mathbb{R}^+$ , montrer que $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement sur $I$ vers la fonction nulle, notée $\tilde{0}$.
2. Retrouver ce résultat en majorant $|f_n(x) - \tilde{0}(x)|$ à l'aide de l'inégalité des accroissements finis.
3. Etudier la convergence de la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ sur $I$.

**Exercice 2**

Soit $A = \left\{\varphi_t : [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{1+tx+t^2}{1+x};\ t > 0\right\}$.

Montrer que la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ peut être approchée uniformément par les éléments de $A$.

**Exercice 3**

Soit $I = ]-1, 1[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : I \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^n$. Etudier la convergence normale sur $I$ de la série de fonctions $\sum f_n$.
Même question en restriction à $J = [-1/2, 1/2]$.

## II. Exercices

**Exercice 4**

Pour chaque suite de fonctions $(f_n) \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, étudier la convergence simple vers une éventuelle fonction limite $f$ sur $I$ :

a) $I = [0,1]$, $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n : x \mapsto n(1-x)^n$ ;
b) $I = [0, \pi/2]$, $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n : x \mapsto (\sin x)^n$ ;
c) $I = [0,1]$, $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n : x \mapsto \dfrac{1}{1+n^2x^2}$ ;
d)$I = [0,1]$, $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n : x \mapsto \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$ ;
e)$I = [-1/2, 1/2]$, $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n : x \mapsto \sum_{k=n}^{2n} x^k$.

*en cas de convergence, on peut se demander si l'on peut approcher $f$ uniformément à l'aide d'éléments de la suite $(f_n)$*

**Exercice 5**

1) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$, où $f_n$ est définie pour $x \in [0, +\infty[$ par $f_n(x) = \dfrac{nx}{n^4 + x^2}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$. On note $S$ sa somme.
2) Pour tout $n \geq 1$, calculer $\|f_n\|_\infty$.
3) La série $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge-t-elle normalement sur $\mathbb{R}^+$ ? Normalement sur tout segment de $\mathbb{R}^+$ ?
4) Montrer que la fonction S est continue sur $\mathbb{R}^+$, puis calculer $\lim_{x\to+\infty} S(x)$.

**Exercice 6**

justifier que l'on définit bien une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ en posant $f : t \to \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\cos(nt)}{n^3 + 2n + 1}$. Vérifier que $f$ est $2\pi$-périodique.

**Exercice 7**

Soit $f : ]-1, 1[ \to \mathbb{R},\ x \mapsto 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : ]-1, 1[ \to \mathbb{R},\ x \mapsto 1 - (\cos(\pi x))^n$.

1. Notons $J = ]-1, 0[ \cup ]0, 1[$. Montrer que $(f_n)$ converge simplement vers $f$ sur $J$.
2. $(f_n)$ converge-t-elle simplement vers $f$ sur $]-1, 1[$ ?
3. Montrer que l'on peut approcher $f$ uniformément sur $H = [1/4, 1/2]$ à l'aide d'éléments de la suite $(f_n)$.

**Exercice 8**

Démontrer que les fonctions $\varphi : [0, +\infty[ \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n e^{-nx}}{1+n^2}$ et $\psi : ]1, +\infty[ \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{(1+n)^x}$ sont définies, continues et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$

**Exercice 9**

Soit $u_n = \int_{[0,1/2]} (1 - t^2 + t^4 + \ldots + (-1)^n t^{2n})dt$ ; Calculer $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lambda$ ; puis donner la nature de la série $\sum_{n\geq 0} (u_n - \lambda)$

**Exercice 10**

Soit $v_n = \int_{[0,1]} (1 + t + t^2 + \ldots + t^n)dt$ ; Calculer $\lim_{n\to+\infty} v_n = \lambda$.

**Exercice 11**

Calculer :

a) $\sum_{n=0}^{+\infty}(1/n!)\int_{[1,x]}(\ln t)^n dt$.

b) $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\int_{[0,x]} t^n(1-t^2)^{1/2}dt$.

**Exercice 12**

(la fonction dzêta de Riemann) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit

$f_n : \mathbb{R}_*^+ \to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{1}{n^x}$ et $g_n : \mathbb{R}_*^+ \to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{(-1)^n}{n^x}$.

1) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge simplement sur $]1,+\infty[$, et normalement sur tout $[a,+\infty[$, pour $a>1$. On note $\zeta :]1,+\infty[\to \mathbb{R}$ sa somme.

2) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} g_n$ converge simplement sur $[1,+\infty[$, et normalement sur tout $[a,+\infty[$, pour $a>1$. On note $\tau :]1,+\infty[\to \mathbb{R}$ sa somme.

3) Montrer que pour tout $x>1$, on a

$\tau(x) = (2^{1-x}-1)\zeta(x)$.

**Exercice 13**

Soit $f \in C^0([0,1],\mathbb{R})$ prouver que :

si $\forall k \in \mathbb{N}, \int_0^1 x^k f(x)dx = 0$ alors $f$ est identiquement nulle (on pourra utiliser le théorème de Weierstraß).

**Exercice 14**

Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ une fonction continue $2\pi$-périodique. Prouver que si $\forall k \in \mathbb{N}, \int_0^{2\pi} e^{-\mathrm{i}kx}f(x)dx = 0$ alors $f$ est identiquement nulle (on pourra utiliser le théorème de Weierstraß).

# III. Pour aller plus loin

**Exercice 15**

Calculer $I_{p,q} = \int_{[0,1]} t^p(1-t)^q dt$; prouver que $\lim_{n\to+\infty} I_{n,n} = 0$ ; prouver que $\sum_{n\geq 1} I_{n,n}$ converge et donner sa somme sous forme d'une intégrale que l'on calculera ;

**Exercice 16**

Soient $f \in \mathcal{C}([0,1])$, $(p_n)$ une suite de fonctions polynomiales telle que $\lim_{n\to+\infty}\sup_{[0,1]}|p_n(x)-f(x)| = 0$, $\ell \in [0,1]$ et $(x_n) \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ une suite de réels telle que $\lim_{n\to+\infty} x_n = \ell$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} p_n(x_n) = f(\ell)$

**Exercice 17**

(vérifier) Soit $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$f : x \mapsto 4E(x) - 2E(2x) + 1$

a) Calculer $u_n = \int_{[0,1]} g(nt)dt$ et $\lim_{+\infty} u_n$ ;

b) Pour $g$ en escalier sur $[0,1]$ calculer $\lim_{n\to+\infty}\int_{[0,1]} g(t)f(nt)dt$.

c) Pour $h$ continue sur $[0,1]$ calculer $\lim_{n\to+\infty}\int_{[0,1]} h(t)f(nt)dt$.

**Exercice 18**

Soit $x \in ]0,\pi[$, et $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $u_n : t \mapsto t^{n-1}\sin(nx),\ \forall n \geq 1$.

1) Pour tout $N \geq 1$, on pose $S_N = \sum_{k=1}^{N} u_k$. Montrer qu'il existe une suite $(P_N)_{N\geq 1}$ de fonctions polynômes telle que pour tout $N \geq$ et tout $t \in \mathbb{R}$, $S_N(t) = \dfrac{P_N(t)}{t^2 - 2t\cos x + 1}$.

2)Prouver l'existence et calculer $\lim_{N\to+\infty}\int_0^1 S_N(t)\mathrm{d}t$.

3) Calculer $\sum_{N=1}^{+\infty}\dfrac{\sin(nx)}{n}$.