

# Chapitre 2 : Séries de nombres réels ou complexes

## I. Applications directes du cours

### Exercice 1

On considère la suite définie par  $u_n = a^n$ , où  $a > 0$  est un réel fixé. Calculer les sommes partielles  $S_N = \sum_{i=0}^N a^i$ . En déduire la nature de la série de terme général  $u_n$ .

### Exercice 2

Etudier la convergence des séries de terme général :  $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$ .

On pourra remarquer que  $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)}$ .  
 $v_n = \frac{x^n}{n!}$ , pour  $x$  réel positif fixé.

### Exercice 3

Sachant que  $\sum \frac{1}{n^2}$  est convergente, que pensez-vous de la nature des séries suivantes ?  
 $\sum v_n$ , pour  $v_n = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}$ .  
 $\sum w_n$ , pour  $w_n = \frac{1}{n^2}$  si  $n$  est pair,  $w_n = 0$  sinon.

## II. Exercices

### Exercice 4

Soit  $(u_n)$  une suite de réels. Comparer la nature des séries à termes positifs

1.  $\sum u_n$  ;
2.  $\sum \frac{\sqrt{u_n}}{n}$  ;
3.  $\sum \frac{u_n}{1+u_n}$  ;
4.  $\sum \ln(1+u_n)$

### Exercice 5

Donner la nature des séries de terme général :  $u_n = \left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n$  ;  $v_n = \frac{n!}{2^{n+1}}$  ;  $w_n = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$  ;  $x_n = \frac{n!}{n^n}$  ;  
 $y_n = \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)^{\sqrt{n}}$  ;  $z_n = \left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n} - 1\right)^n$  ;  
 $t_n = \int_n^{2n} \frac{dx}{1+x^{3/2}}$ .

### Exercice 6

En utilisant des intégrales, donner un encadrement et un équivalent en  $+\infty$  des sommes partielles d'ordre  $n$  des séries suivantes de terme général  $u_n$  :

1.  $u_n = 1/n^\alpha$ , ( $\alpha < 1$ ) ;
2.  $u_n = \ln n/n$
3.  $u_n = \text{Arcsin}(1/\sqrt{n})$

### Exercice 7

Discuter selon la valeur des paramètres réels  $a, b, \alpha, \beta$  la nature des séries suivantes de terme général : a)  $\frac{(na)^n}{n!}$  ;  
 b)  $\frac{\alpha^n}{n+\beta^n}$  ; c)  $n^\alpha \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n}\right)$  ; d)  $a^{\sqrt{n}}$  ; e)  $\prod_{k=1}^n \sqrt[k]{a}$  ; f)  $a \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$  ; g)  $\text{Arccos}\left(\frac{n^\alpha}{1+n^\alpha}\right)$  ; h)  $\int_0^{1/n} \text{Arcsin}(x)^\alpha dx$ .

### Exercice 8

En utilisant des séries étudier la convergence des suites  $s_n = \sum_{k=2}^n \frac{\ln k}{k} - \frac{\ln n}{2}$ , et  $t_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{1+n}} - \text{Argsh } n$ .

### Exercice 9

Soit  $(a_n)$  une suite décroissante de termes positifs telle que  $\sum a_n$  converge, étudier la série  $\sum n(a_n - a_{n+1})$  en déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} na_n = 0$ .

### Exercice 10

Prouver que  $\sum \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n \sqrt{n}}$  converge. En notant  $S$  sa somme, déterminer un entier  $N$ , pour que  $S - S_N < 10^{-2}$ , en déduire une valeur approchée de  $S$  à  $2 \cdot 10^{-2}$  près.

### Exercice 11

Donner la nature des séries suivantes de terme général :  
 a)  $\sin\left(\frac{n\pi}{n+1}\right)$  ; b)  $\frac{(-1)^n \ln n}{n}$  ; c)  $\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(k+1)!}$  ; d)  $\frac{\cos n^2}{n}$  ;  
 e)  $\frac{(-1)^n}{n^2 + \sin n}$  ; f)  $\frac{(1+i)^n}{(n^2+1)a^n}$  ; g)  $\ln\left(\frac{\sqrt{n} + (-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$

### Exercice 12

Soient  $\sum u_n, \sum v_n$  deux séries à termes strictement positifs convergentes, démontrer que les séries de terme général  $a_n = \sqrt{u_n v_n}$  et  $b_n = \frac{u_n v_n}{u_n + v_n}$  sont convergentes.

### Exercice 13

- 1) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$  ; démontrer que pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$  :  $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k}$ , en déduire que  $s_n \sim \ln n$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$  ;
- 2) Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $u_n = s_n - \ln n$ , démontrer que  $(u_n)$  est une suite décroissante convergente de limite notée  $\gamma$ , prouver que  $s_n = \ln n + \gamma + o(1)$  ;
- 3) Pour  $n \in \mathbb{N}^*$   $\sigma_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ , démontrer que  $\sigma_n = \int_0^1 \frac{1 - (-x)^n}{1+x} dx$ , et que  $(\sigma_n)$  est une suite convergente et calculer sa limite ; retrouver ce résultat en remarquant que  $\sigma_{2n} = s_{2n} - s_n$  ;

### III. Pour aller plus loin

#### Exercice 14

Démontrer que la série de Bertrand de paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  définie par l'expression  $\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$  converge si et seulement si  $\alpha > 1$  ou ( $\alpha = 1$  et  $\beta > 1$ )

#### Exercice 15

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $a_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x \sin(nx) dx$ ,

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{(-e^{ix} \cos x)^n}{1 + e^{ix} \cos x} dx$$

1. Prouver que  $\lim a_n = 0$  ;
2. Soit  $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k$ . Calculer  $S_n$  en fonction de  $I_0$  et de  $I_{n+1}$  ;
3. Calculer  $I_0$  prouver que  $\lim I_n = 0$ , en déduire la somme de la série  $\sum a_n$ .

#### Exercice 16

Prouver que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  l'équation  $\ln x = x - n$ , a une solution unique dans  $[1, +\infty[$  notée  $x_n$ , étudier la nature de  $\sum (x_n)^\alpha$ , pour  $\alpha$  réel.

#### Exercice 17

Soit  $\sum u_n$  une série à termes strictement positifs telle que  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\lambda}{n} + v_n$  où  $\lambda$  est réel et  $\sum v_n$  est une série absolument convergente

1. Pour tout  $n$ , on pose  $w_n = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) + \frac{\lambda}{n}$ . Prouver que  $\sum w_n$  est une série absolument convergente.
2. En déduire que  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{A}{n^\lambda}$ , pour un réel  $A > 0$ .
3. Etudier  $\sum \left(\frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{2.4.6 \dots (2n)}\right)^\alpha$ , pour  $\alpha \in \mathbb{R}_+$