

**Formule de Stirling :**  $n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2n\pi} \left(\frac{n}{e}\right)^n$

## I. Constante d'Euler

Soit  $f : [1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \frac{1}{t}$ . Pour tout  $n \geq 1$ , on note  $w_n = \int_n^{n+1} f(t)dt - f(n+1)$ .

1. En utilisant la comparaison série intégrale, montrer que la série  $\sum_{n \geq 1} w_n$  converge.
2. Montrer que pour tout  $N \geq 1, \sum_{k=1}^{N-1} w_k = 1 + \ln(N) - \sum_{k=1}^N \frac{1}{k}$ .
3. En déduire que la suite  $(g_N)_{N \geq 1}$  définie pour tout  $N \geq 1$  par  $g_N = \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} - \ln N$  converge vers une limite notée  $\gamma$ . Cette limite est appelée « constante d'Euler ». Elle vaut environ 0,577...

## II. Formule de Stirling

On pose  $g : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \ln x$ , et pour tout  $k \geq 1, v_k = \int_k^{k+1} g(t)dt$ .

1. Montrer que pour tout  $n \geq 1,$

$$\sum_{k=1}^{n-1} v_k = n \ln n - n + 1 - \ln(n!) \tag{1}$$

2. Soit  $k \geq 1$  fixé.

(a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que  $v_k = \int_k^{k+1} \frac{(t-k)}{t} dt$ .

(b) A l'aide d'une nouvelle intégration par parties, montrer que  $v_k = \frac{-1}{2(k+1)} - \frac{1}{2}x_k$ , où  $x_k = \int_k^{k+1} \frac{(t-k)^2}{t^2} dt$ .

3. A l'aide d'une majoration, montrer que  $\sum_{k \geq 1} x_k$  converge vers une limite  $\ell$ .

4. (a) En reportant dans (1), montrer que :  $\forall n \geq 1, \ln(n!) = n \ln n - n + 1 + \frac{1}{2} \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} x_k$

(b) En déduire que  $\ln(n!) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln n + K + o(1)$ , où  $K = \frac{1}{2}(1 + \gamma + \ell)$ .

5. En déduire que  $n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{n} n^n e^{-n} e^K$

## III. Calcul de $e^K$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $I_n = \int_0^{\pi/2} (\sin x)^n dx$  (intégrale de Wallis)

1. Montrer que pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , on a  $I_{2p} = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \frac{\pi}{2}$ , et  $I_{2p+1} = \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!}$ .

2. En déduire que  $I_n I_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2n}$

3. (a) Montrer que la suite  $(I_n)$  est décroissante, et en déduire que pour tout  $n \geq 1, I_n I_{n+1} \leq I_n^2 \leq I_n I_{n-1}$ .

(b) En déduire que  $I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$

4. Exprimer  $I_{2p}$  en fonction de  $p$  et  $\pi$  d'une part, et en fonction de  $e^K$  et  $\pi$  d'autre part. En déduire que  $e^K = \sqrt{2\pi}$ .

Conclure.