Lycée Brizeux
PCSI B

Année 2009-2010

Devoir libre n° 7

Mécanique

Travail à rendre le lundi 25 janvier.

Problème A

A.1. Réalisation d'un sismographe

Un interféromètre de Michelson est constitué entre autres de deux miroirs quasiment perpendiculaires notés M_1 et M_2.

Le miroir (M_1) de masse m est fixé à un ressort qui le supporte. Le ressort, de raideur k et de masse négligeable, est assujetti à se déplacer verticalement grâce à un système de guidage. L'ensemble repose sur le sol qui constitue un référentiel galiléen. Le miroir (M_1) peut donc osciller verticalement le long de l'axe Ox. On suppose que ses oscillations sont amorties par une force de frottement fluide $\overrightarrow{F}_v = -f\overrightarrow{v}$ où $\overrightarrow{v}$ est la vitesse instantanée de (M_1) et f un coefficient de frottement positif. À l'équilibre la surface réfléchissante de (M_1) est dans un plan horizontal contenant O_1 (voir la figure 1). On repère la position du miroir par son élongation x par rapport à la position d'équilibre. Par définition on a donc $x = 0$ à l'équilibre.

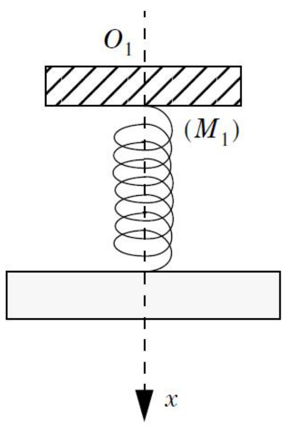

FIGURE 1 –

1. On suppose que le miroir (M_1) est abaissé d'une petite hauteur x_0 puis lâché sans vitesse initiale. Donner sans démonstration l'équation différentielle régissant le mouvement de (M_1) au cours du temps.
   La figure 2 donne le graphe $x(t)$ du mouvement de (M_1).

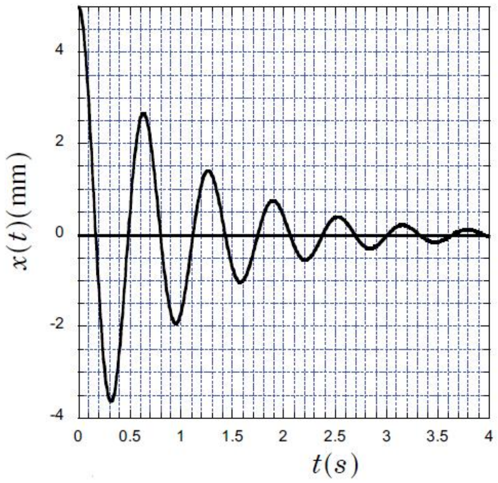

FIGURE 2 –

2. En s'appuyant sur ce graphe, résoudre l'équation différentielle du **1.**. On pourra poser, pour simplifier les écritures : $\lambda = \frac{f}{2m}$ et $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$.

3. Calculer, à partir du graphe de la figure 2, les valeurs approchées de λ et ω_0. En déduire une estimation numérique de f et de k en prenant $m = 100g$.

4. Le sol, sur lequel repose le système ci-dessus, est maintenant animé d'un mouvement de translation sinusoïdal suivant l'axe x ayant pour expression $s(t) = s_0 cos(\omega t)$ par rapport à un référentiel galiléen. On se place toujours dans le référentiel lié au sol, que devient l'équation différentielle du mouvement vérifiée par l'élongation $x(t)$ du miroir (M_1) ?

5. On peut alors exprimer l'élongation de (M_1) en régime permanent par $x(t) = x_0 cos(\omega_1 t + \Phi)$. En utilisant la notation complexe, donner l'expression de la transmittance $\underline{Y} = \frac{\underline{x}}{\underline{s}}$ du système en fonction de ω_1, ω_0 et λ.

6. On note Y le module de $\underline{Y}$. Quelle est la limite de Y quand $\omega_1 \to +\infty$? Quelle est la plage de valeurs de λ pour lesquelles passe Y par un maximum quand ω_1 varie ? Pour alléger les écritures on pourra poser : $z = \frac{\omega_0^2}{\omega_1^2}$. Représenter l'allure du graphe de Y en fonction de ω_1, on distinguera deux situations possibles suivant la valeur de λ.

7. Pour $\lambda \geq \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$, calculer la pulsation de coupure ω_c à $-3\ dB$ de la fonction Y. On posera $z_c = \frac{\omega_0^2}{\omega_c^2}$.

8. Le but est de réaliser un sismographe, pour cela il faut que le mouvement de (M_1) suive le plus fidèlement possible le mouvement du sol en évitant tout phénomène de résonance. La pulsation ω_0 étant fixée, quelle valeur faut-il choisir pour λ pour que la bande passante du sismographe soit la plus large possible ? Que vaut alors la pulsation de coupure ? On admettra que la fonction $z_c(u)$, avec $u = \frac{\lambda^2}{\omega_0^2}$, est monotone décroissante.

A.2. Filtrage du signal

Le mouvement du sol est périodique de pulsation ω_1 mais pas nécessairement sinusoïdal et on désire analyser les différentes composantes harmoniques du signal. Pour cela on traite le signal V_E qui est l'image de l'élongation du miroir (M_1) à l'aide du montage électronique de la figure 3.
L'amplificateur opérationnel est supposé parfait et fonctionnant en régime linéaire.

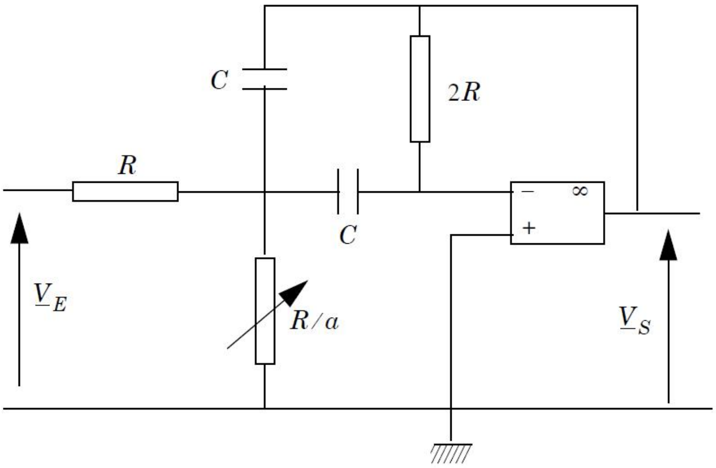

FIGURE 3 –

1. Donner l'expression de la fonction de transfert complexe $\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{V_S}}{\underline{V_E}}$ reliant la tension de sortie $\underline{V_S}$ à la tension d'entrée $\underline{V_E}$ de ce montage.

2. Montrer qu'elle peut se mettre sous la forme : $\underline{H}(j\omega) = \frac{A}{1+jQ\left(\frac{\omega}{\Omega}-\frac{\Omega}{\omega}\right)}$ où j est tel que $j^2 = -1$.
Donner les expressions de A, Q et Ω en fonction de R, C et α.

3. Quel est le type de filtre réalisé ? Pour justifier la réponse, on tracera le diagramme de Bode du gain en décibel en fonction de la fréquence réduite $x = \frac{\omega}{\Omega}$ en précisant les pentes des asymptotes et leur point d'intersection ainsi que la position du maximum. On fera toutes les applications numériques avec la valeur $Q = 20$. Donner sans démonstration l'expression de $\Delta\omega$, bande passante à $-3\ dB$ de ce filtre, en fonction des paramètres du montage.
Comment varie Q avec α ? Quelle est l'influence de α sur la bande passante $\Delta\omega$?

4. On désire isoler l'harmonique N du signal d'entrée de pulsation ω_1. Montrer que cela est possible si :

4.a. le produit RC vérifie une condition par rapport à ω_1,

4.b. la pulsation Ω est réglée par α à une valeur appropriée.

5. Pour vérifier le bon fonctionnement du filtre de la figure 3 on applique en entrée une tension en créneau symétrique de fréquence $f = 40\ Hz$. On a choisi α de sorte que $Q = 20$ et on obtient le signal de sortie représenté sur la figure 4. Sachant que l'on a choisi $C = 3,4\ \mu F$, quelle valeur de R a-t-on prise pour obtenir cet enregistrement ? Commenter le rôle du filtre.

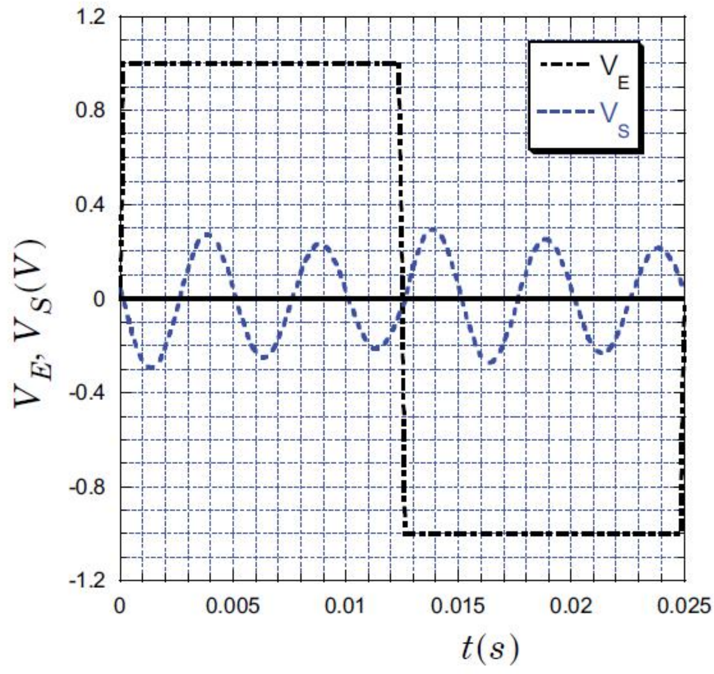

FIGURE 4 –

Problème B Densimètre à tube vibrant

La mesure de la masse volumique de fluides est nécessaire dans de nombreux domaines industriels (industries agro-alimentaires, pétrolières ...). Ce problème étudie le principe d'un dispositif de mesures continues et permanentes de masses volumiques.

Soit un corps creux de volume intérieur V_0 et de masse M_0, rempli d'un fluide homogène de masse volumique ρ (l'ensemble constitue le système S) inconnue et à déterminer. S est suspendu à l'extrémité d'un ressort de coefficient de raideur K. Le ressort est suspendu à une paroi fixe du référentiel du laboratoire, supposé galiléen. Le dispositif est représenté figure 5. Le champ de pesanteur est uniforme. On note $z(t)$ la position à l'instant t du barycentre G de S par rapport à sa position d'équilibre.

1. À $t = 0$, le ressort est écarté de sa position d'équilibre, sans vitesse initiale, de $z(0) = Z_0$.

- **1.a.** Déterminer l'équation différentielle du mouvement de S. On introduira la pulsation propre ω_0 de S.
- **1.b.** En déduire l'expression de $z(t)$.
- **1.c.** Montrer que la masse volumique peut se mettre sous la forme
  $\rho = \frac{1}{A}\left(T_0^2 - B\right) \qquad (1)$
  où T_0 est la période d'oscillation de S. On exprimera les constantes A et B en fonction de V_0, K et M_0.
- **1.d.** Donner les unités de A et B.

2. En réalité, le dispositif est soumis à des forces supplémentaires de frottements fluides de résultante $\overrightarrow{f_f} = -h\overrightarrow{v_G}$.

- **2.a.** Établir la nouvelle équation différentielle vérifiée par $z(t)$ en l'écrivant sous forme canonique : on exprimera pour cela les coefficients de l'équation différentielle en

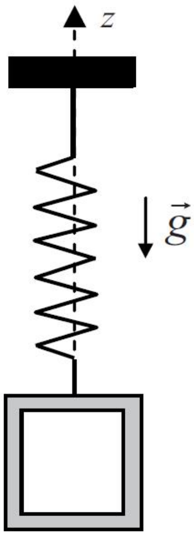

FIGURE 5 –

fonction des seuls paramètres ω_0 et Q, où ω_0 est la pulsation propre du système et Q le facteur de qualité vérifiant $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{h}{M}$, où M est la masse totale du système S.

2.b. Dans l'application envisagée, la solution peut se mettre sous la forme $z(t) = \beta e^{(-\alpha t)} cos\,(\omega_p t + \varphi)$.

2.b.a. Quelle est la nature du mouvement de S ? À quelle condition sur Q cette solution est-elle envisageable ?

2.b.b. Établir les expressions analytiques de α et ω_p en fonction de ω_0 et Q puis en fonction de h, K, M_0, V_0 et ρ.

2.b.c. Expliciter φ et β en fonction de ω_0, ω_p, Q et Z_0.

2.b.d. On souhaite approximer ω_p par ω_0, avec une erreur relative $\left|\frac{\omega_p - \omega_0}{\omega_0}\right| \leq 10^{-3}$. Établir l'inégalité numérique que doit satisfaire Q (relation (2)).

2.c. On enregistre (cf. figure 6) l'évolution temporelle suivante pour $z(t)$ (en cm) :

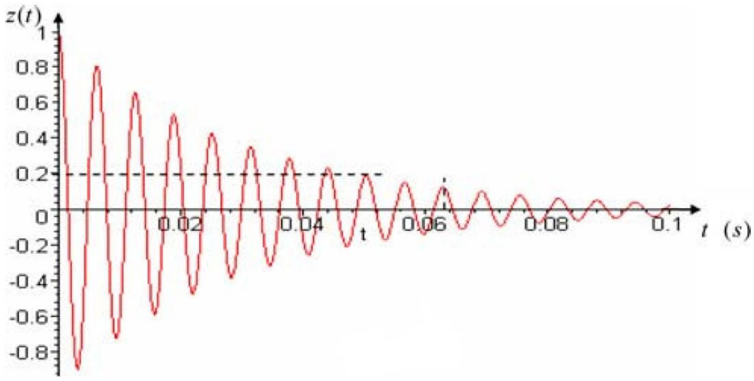

FIGURE 6 –

2.c.a. Déduire de l'enregistrement les valeurs numériques de Z_0, ω_p et α.

2.c.b. Calculer Q. Conclusion ?