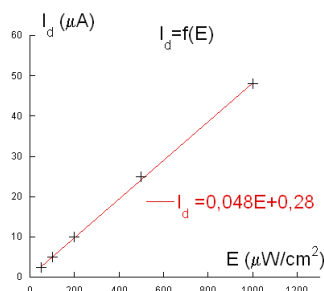


## Correction du devoir surveillé n° 1

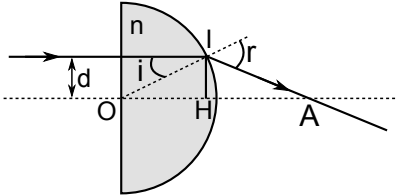
### Exercice 1 Capteur lumineux utilisant une photodiode



- 1.
2. Les points étant quasi alignés, la relation entre  $I_d$  et  $E$  est linéaire du type  $I_d = aE + b$ . Le coefficient  $b$  représente la valeur de  $I_d$  en absence d'éclairement, c'est le courant d'obscurité. Graphiquement  $b$  s'interprète comme l'ordonnée à l'origine, on constate que  $b \approx 0\mu\text{A}$ . En utilisant une régression linéaire sur la calculatrice on obtient  $b = 0,28 \mu\text{A}$ .
3. Le coefficient correspond à la pente de la droite. On considérant deux points sur cette droite, on calcule  $a = 0,048 \text{ AW}^{-1}\text{cm}^2 = 4,8 \cdot 10^{-6} \text{ AW}^{-1}\text{m}^2 = 4,8 \cdot 10^{-6} \text{ Akg}^{-1}\text{s}^3$ . (1 W correspond à  $1 \text{ kgm}^2\text{s}^{-3}$ ).
4. La diode se comporte à éclairement donné, comme une source de courant de courant électromoteur  $I_d = aE$ . Le conducteur ohmique est donc parcouru par l'intensité  $I_d$ . La loi d'Ohm aux borne de la résistance s'écrit  $U_1 = RI_d = aRE$ . La tension  $U_1$  est bien proportionnelle à l'éclairement  $E$ .
5. Pour  $E = 0,2 \cdot 10^{-3} \text{ W.cm}^{-2}$ , on a  $I_d = 0,048 * 0,2 \cdot 10^{-3} = 9,6 \cdot 10^{-6} \text{ A}$ , on en déduit que  $R = \frac{U_1}{I_d} = 208 \text{ k}\Omega$ . On peut alors écrire  $U_1 = aRE$  et  $U_r = aRE_r$ , soit en faisant le rapport membre à membre  $U_1 = \left(\frac{E}{E_r}\right) U_r$
6. On applique la formule du pont diviseur de tension pour déterminer  $U_2$ . On obtient  $U_2 = \frac{(1-k)R}{kR+(1-k)R} e_0 = (1-k)e_0$ . En utilisant une loi des mailles on obtient  $U = U_2 - U_1$
7. La condition  $U = 0$  se réécrit  $U_1 = U_2$  avec  $U_1 = \left(\frac{E_a}{E_r}\right) U_r$ , soit  $(1-k)e_0 = \left(\frac{E_a}{E_r}\right) U_r$  d'où  $k = 1 - \frac{E_a U_r}{E_r e_0}$ . Pour que  $k$  soit positif, il faut que la condition  $E_a U_r < E_r e_0$  soit vérifiée. En pratique, on utilise un potentiomètre de résistance totale  $R$  pour simuler les deux résistances  $kR$  et  $(k-1)R$ . On ajuste le réglage du potentiomètre pour annuler la tension  $U$  que l'on mesure à l'aide du voltmètre.
8. La photodiode reçoit maintenant l'éclairement total  $E + E_a$ . La tension  $U$  mesurée est donc  $U = U_2 - U_1 = (1-k)e_0 - \left(\frac{E+E_a}{E_r}\right) U_r$ , soit après simplification  $U = -\frac{U_r}{E_r} E$ . La tension mesurée est bien proportionnelle à l'éclairement.

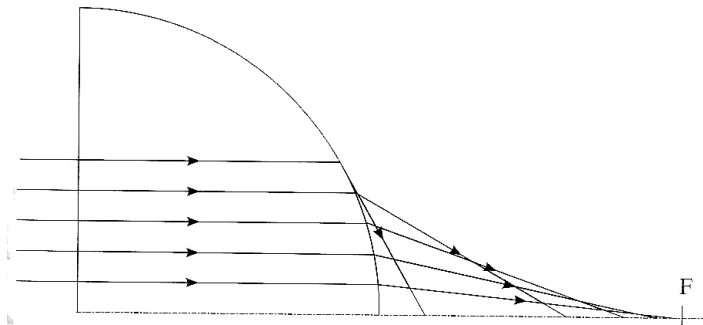
## Exercice 2 Trajet d'un rayon dans une demi-boule

- On peut obtenir une réflexion totale lorsque le rayon lumineux passe d'un milieu plus réfringent à un milieu moins réfringent et lorsque l'angle d'incidence  $i_1$  est supérieur à  $i_{lim} = \arcsin \frac{n_2}{n_1}$ .
- Ici  $\sin i_{lim} = \frac{1}{n}$ , on a donc une réflexion totale si  $\sin i > \frac{1}{n}$ , or d'après la figure  $\sin i = \frac{d}{R}$ . L'inégalité précédente se réécrit donc :  $\frac{d}{R} > \frac{1}{n}$ , soit  $d > \frac{R}{n}$ . On a donc  $d_{lim} = \frac{R}{n}$



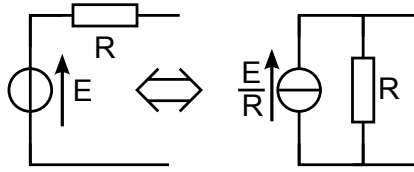
- 
- 
- 
- En utilisant les triangles rectangles de la figure, on décompose  $OA = OH + HA$  avec  $\cos i = \frac{OH}{R}$  soit  $OH = R \cos i$  et  $\tan(r - i) = \frac{d}{HA}$ , soit  $HA = \frac{R \sin i}{\tan(r - i)}$ . On en déduit que  $OA = R \left( \cos i + \frac{\sin i}{\tan(r - i)} \right)$ .
- Lorsque la distance  $d$  devient très petite, l'angle  $i$  tend vers zéro ainsi que l'angle  $r$ . En remplaçant  $\sin i$  par  $i$  et  $\tan(r - i)$  par  $r - i$ , on obtient :  $OA \approx \left( \frac{r}{r - i} \right) R$  et les angles  $i$  et  $r$  sont liés par la seconde loi de Descartes :  $n \sin i = \sin r$  soit  $ni \approx r$ . En remplaçant dans l'expression précédente, on obtient  $OF = \frac{n}{n-1} R$ .
- On utilise les expressions suivantes pour calculer  $i$  puis  $r$  :  $\sin i = \frac{d}{R}$  d'où  $i = \arcsin \frac{d}{R}$  et  $r = \arcsin(n \sin i)$ . On peut alors compléter le tableau suivant :

$d$ (cm)	1	2	3	4	5
$i$ (°)	5,7	11,5	17,5	23,6	30,0
$r$ (°)	11,5	23,6	36,9	53,1	90,0
$OA$ (cm)	19,7	19,1	18,1	16,2	11,5

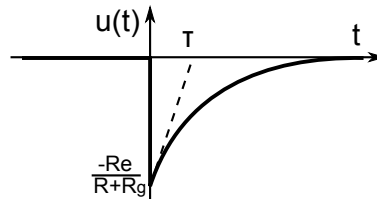


Le dernier rayon tracé est celui qui correspond à la réfraction limite. On vérifie que ce rayon émerge avec un angle de  $90^\circ$

### Exercice 3 Modélisation linéaire d'un circuit



- 1.
2. On a  $u(t) = e(t) - R_g i(t) = L \frac{di}{dt} = R(i(t) - i_1)$
3. À  $t = 0^-$ , le régime établi continu est atteint, donc la tension aux bornes de la bobine est nulle et la bobine se comporte comme un fil. On en déduit alors :  $u(t = 0^-) = 0$ ,  
 $i(t = 0^-) - i_1(t = 0^-) = 0$  soit :  $i(t = 0^-) = i_1(t = 0^-) = \frac{e}{R_g}$ .
4. Lorsqu'on « éteint » le générateur, le circuit devient équivalent à un circuit série comportant une bobine parcouru par le courant  $i_1$  et une résistance équivalente  $R_{eq} = \frac{R_g R}{R + R_g}$  parcouru par le même courant  $i_1$ .
5. La loi des maille nous donne  $u(t) + R i_1(t) = 0$ , soit en dérivant cette relation et sachant que  $u(t) = L \frac{di_1}{dt}$ , on a :  $\frac{L}{R_{eq}} \frac{du}{dt} + u = 0$ , soit en posant  $\tau = \frac{L(R + R_g)}{R R_g}$ ,  $\tau \frac{du}{dt} + u = 0$ .
6. Le courant qui traverse une bobine est toujours continu. On a donc  $i_1(t = 0^+) = i_1(t = 0^-) = \frac{e}{R_g}$ . On a alors  $u(t = 0^+) = -R_{eq} * i_1(t = 0^+)$ , soit  $u(t = 0^+) = -\frac{R e}{R + R_g}$ .
7. La solution de l'équation différentielle est de la forme  $u(t) = K e^{-\frac{t}{\tau}}$  et connaissant  $u(t = 0^+)$ , on en déduit que  $u(t) = -\frac{R e}{R + R_g} e^{-\frac{t}{\tau}}$ .



### Problème I Charge d'un condensateur à travers une résistance

#### A Étude temporelle

**A.1** Le condensateur se comporte au bout d'un temps très long comme un interrupteur ouvert (Un régime permanent est atteint). Par conséquent  $i(\infty) = 0$  et il n'y pas de chute de tension aux bornes de la résistance. La loi des mailles nous donne alors :  $v_s(\infty) = E$ .

**A.2** D'après la loi d'Ohm,  $[R] = \frac{[V]}{[I]}$ , et sachant que  $i = C \frac{dv_s}{dt}$  on obtient  $[C] = \frac{[IT]}{[V]}$  soit  $[RC] = T$ . La constante de temps du circuit  $\tau = RC$  à la dimension d'un temps et s'exprime en seconde.

**A.3** D'après la loi des mailles, on a  $E = Ri + v_s = RC \frac{dv_s}{dt} + v_s$ . On reconnaît une équation différentielle linéaire du premier ordre.

**A.4**  $v_s(t)$  est la somme de la solution de l'équation différentielle sans second membre et d'une solution particulière.  $v_s(t) = E + K e^{-\frac{t}{\tau}}$  où  $K$  est une constante d'intégration que l'on détermine à partir des conditions initiales.  $v_s(t = 0) = 0$  (condensateur initialement déchargé) soit  $K = -E$  d'où  $v_s(t) = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$ . Quand  $t \rightarrow \infty$ ,  $v_s(t) \rightarrow E$ . On retrouve ce que l'on avait trouvé à la question 1.

**A.5**  $\frac{dv_s}{dt}(t=0) = \frac{E}{RC}$ . La pente à l'origine à donc pour équation  $y = \frac{E}{RC}t$  et le point d'intersection avec l'asymptote  $y = E$  a pour coordonnées  $(RC, E)$ .

**A.6** On résout :  $0,99E = E(1 - e^{-\frac{t_1}{\tau}})$  soit  $e^{-\frac{t_1}{\tau}} = 0,01$ , d'où  $t_1 = \tau \ln 100$ .

**A.7**  $i(t) = C \frac{dv_s}{dt} = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$ .

## B Étude énergétique

**B.1**  $E_C = \frac{1}{2}CE^2$ .

**B.2**  $E_J = \int_0^\infty Ri^2 dt = \int_0^\infty \frac{E^2}{R^2} e^{-\frac{2t}{\tau}} dt = \frac{E^2}{R} [-\frac{\tau}{2} e^{-\frac{2t}{\tau}}]_0^\infty$ . Soit  $E_J = \frac{1}{2}CE^2$ .

**B.3**  $E_g = \int_0^\infty Eidt = \int_0^\infty \frac{E^2}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} dt = \frac{E^2}{R} [-\tau e^{-\frac{t}{\tau}}]_0^\infty$ . D'où  $E_g = CE^2$ . On vérifie la conservation de l'énergie au cours de la charge du condensateur :  $E_g = E_J + E_C$ .

**B.4**  $\rho = \frac{E_C}{E_g} = \frac{1}{2}$ .

## C Amélioration du rendement

**C.1** On reprend les résultats de la partie précédente et on remplace  $E$  par  $\frac{E}{2}$ . On en déduit  $E_{g1} = \frac{1}{4}CE^2$ ,  $E_{C1} = \frac{1}{8}CE^2$ .

**C.2** On a le même circuit que dans la partie précédente, on a donc :  $E = RC \frac{dv_s}{dt} + v_s$ .  $v_s(t) = E + Ke^{-\frac{t}{\tau}}$  et on détermine  $K$  sachant que  $v_s(t=0) = \frac{E}{2}$ , soit  $K = -\frac{E}{2}$ , d'où  $v_s(t) = \frac{E}{2}(2 - e^{-\frac{t}{\tau}})$ .

**C.3**  $i(t) = C \frac{dv_s}{dt} = \frac{E}{2R} e^{-\frac{t}{\tau}}$ .

**C.4**  $E_{g2} = \int_0^\infty Eidt = \int_0^\infty \frac{E^2}{2R} e^{-\frac{t}{\tau}} dt = \frac{E^2}{2R} [-\tau e^{-\frac{t}{\tau}}]_0^\infty$ . D'où  $E_{g2} = \frac{1}{2}CE^2$  et :

$$E_{C2} = \frac{1}{2}CE^2 - E_{C1} = \frac{3}{8}CE^2$$

**C.5**  $\rho' = \frac{E_{C1} + E_{C2}}{E_{g1} + E_{g2}} = \frac{2}{3}$ . Le rendement a été amélioré.

**C.6** Pour faire tendre le rendement vers 1, on doit charger le condensateur avec un grand nombre d'étapes successives en utilisant à chaque fois des générateurs qui ont pour force électromotrice des valeurs infiniment voisines.