

## Correction du devoir surveillé n° 7

### Problème I Étude d'une centrale nucléaire (Centrale Supélec TSI 2009)

#### A Étude du cycle de Carnot

##### A.1

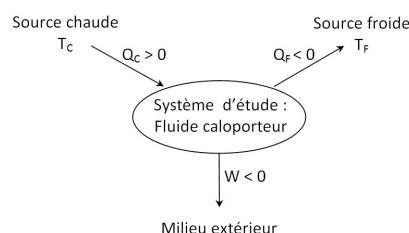
- a) Cf. cours
- b) Le cycle étudié étant un cycle moteur, il est décrit dans le sens horaire, que ce soit en digramme  $(P, V)$  ou en diagramme  $(T, S)$ .

##### A.2

L'énergie nécessaire au fonctionnement d'un moteur est fournie par la source chaude. Une partie de cette énergie

- a) est transférée par l'intermédiaire du fluide caloporteur à la source froide. La différence est récupérée sous forme de travail, ce qui permet de faire tourner un volant.

b)  $\eta_C = 1 - \frac{T_F}{T_C} = 47,1\%$



#### B Etude du cycle de Rankine

**B.1** On raisonne sur un système fermé constitué d'une masse  $m$  de fluide.

A l'instant initial  $t_i$  le système est composé de la masse  $m_0$  de fluide contenue dans le composant étudié (compresseur ou turbine par exemple) et de la masse  $m_1$  occupant un volume  $V_1'$  qui entrera dans le composant entre  $t_i$  et  $t_f$ . On a :  $m = m_0 + m_1$ .

A l'instant final  $t_f$  le système est composé de la masse  $m_0'$  de fluide contenue dans le composant et de la masse  $m_1'$  qui en est sortie entre  $t_i$  et  $t_f$  et qui occupe un volume  $V_1'$ . On a :  $m = m_0' + m_1'$ . En régime permanent, la masse contenue dans le composant est la même à chaque instant :  $m_0 = m_0'$  donc  $m_1 = m_1'$ .

En négligeant les variations d'énergie cinétique et d'énergie potentielle devant les variations d'énergie interne, le premier principe appliqué au système fermé s'écrit :  $\Delta U = Q_e + W$  avec  $W = W_i + P_{amont}V_1 - P_{aval}V_1'$ ,  $W_i$  représentant le travail autre que celui des forces de pression s'exerçant en amont et en aval du système.

D'autre part, en régime permanent, la variation d'énergie interne du système fermé est la même que celle d'une masse  $m_1$  occupant un volume  $V_1$  qui passerait de l'aval du composant à son amont, occupant un volume  $V_1'$  :  $\Delta U = U_{m_1,amont} - U_{m_1,aval}$ .

On obtient donc :  $\Delta U = U_{m_1,amont} - U_{m_1,aval} = Q_e + W_i + P_{amont}V_1 - P_{aval}V_1'$

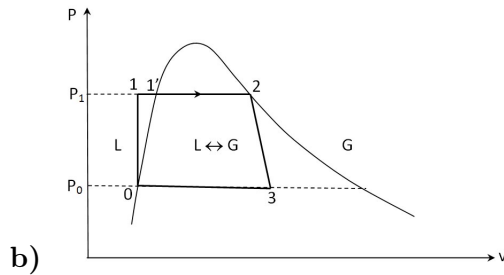
Soit :  $H_{m_1,amont} - H_{m_1,aval} = Q_e + W_i$ .

Enfin, en régime permanent, la variation d'enthalpie de la masse  $m$  de fluide peut s'écrire sous la forme :  $\Delta H = H_{m_1,amont} - H_{m_1,aval}$ .

La variation d'enthalpie massique du fluide au cours de sa traversée du composant s'écrit alors :  $\Delta h = q_e + w_i$

##### B.2

- a) Cf. cours



### B.3 Calcul de l'efficacité avec des tables incomplètes

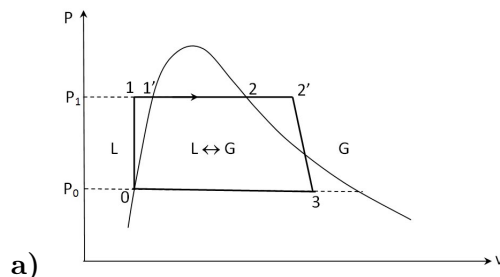
- a)  $\eta = \frac{-w_{\text{totsuruncycle}}}{q_C} = \frac{q_{\text{cond}} + q_{GV}}{q_{GV}} = 1 + \frac{q_{\text{cond}}}{q_{GV}}$
- b)  $q_{GV} = c_\ell(T_2 - T_{1'}) + \ell_v(T_2)$  avec  $T_{1'}$  a priori différent de  $T_1$ .  
Cependant, la pompe comprime le fluide de façon isentropique. On peut alors écrire :  
 $\Delta s_{01} = 0 = c_\ell \ln\left(\frac{T_{1'}}{T_1}\right)$ .  
On en déduit donc que  $T_1 = T_{1'}$ . Par conséquent :  $q_{GV} = c_\ell(T_2 - T_1) + \ell_v(T_2)$
- c) i)  $s_0 - s_3 = \frac{q_{\text{cond}}}{T_1}$   
ii) Les transformations  $0 \rightarrow 1$  et  $2 \rightarrow 3$  sont adiabatiques réversibles donc isentropiques :  
 $s_0 = s_1$  et  $s_2 = s_3$ .  
iii)  $q_{\text{cond}} = T_1(s_0 - s_3) = T_1(s_1 - s_2) = T_1(s_1 - s_{1'} + s_{1'} - s_2)$   
La transformation  $2 \rightarrow 1'$  correspond à une liquéfaction totale à la température  $T_1$  donc :  
 $s_{1'} - s_2 = \frac{-\ell_v(T_2)}{T_2}$   
La transformation  $1' \rightarrow 1$  correspond au refroidissement d'une phase liquide de  $T_2$  à  $T_1$   
donc :  $s_1 - s_{1'} = c_\ell \ln \frac{T_1}{T_2}$   
On aboutit alors à :  $q_{\text{cond}} = T_1\left(\frac{-\ell_v(T_2)}{T_2} + c_\ell \ln \frac{T_1}{T_2}\right)$
- d)  $\eta = 1 + \frac{T_1\left(\frac{-\ell_v(T_2)}{T_2} + c_\ell \ln \frac{T_1}{T_2}\right)}{c_\ell(T_2 - T_1) + \ell_v(T_2)} = 39\%$
- e) Le rendement de la machine de Rankine est inférieur à celui du moteur de Carnot. En effet, la transformation  $1 \rightarrow 1'$  est par nature irréversible.

### B.4 Calcul de l'efficacité avec des tables complètes

- a) Le titre massique en vapeur peut être déterminé à partir de la règle des moments :  
 $x_v = \frac{s_3 - s_L(T_1)}{s_V(T_1) - s_L(T_1)}$  avec  $s_3 = s_2$ , la transformation  $2 \rightarrow 3$  étant isentropique.  
On obtient :  $x_v = 64\%$ .  
On en déduit alors :  $h_3 = h_L(T_1) + x_v \ell(T_1) = h_L(T_1) + x_v(h_V(T_1) - h_L(T_1)) = 1686,7 \text{ kJ.kg}^{-1}$ .
- b)  $\eta = 1 + \frac{q_{\text{cond}}}{q_{GV}} = 1 + \frac{h_0 - h_3}{h_2 - h_1} = 1 + \frac{h_L(T_1) - h_3}{h_V(T_2) - h_L(T_1)}$  car  $h_1 = h_0 = h_L(T_1)$   
On trouve alors  $\eta = 40\%$ . On retrouve une valeur proche de celle calculée précédemment.
- c) Le fluide est diphasé à la sortie de la turbine ( $x_v = 64\%$ ). Une partie de la vapeur saturante qui entre dans la turbine se condense donc au cours de la détente. Les gouttelettes de liquide formées sont fortement accélérées à l'intérieur de la turbine, ce qui a tendance à détériorer les pales et à limiter la durée de fonctionnement de ces appareils.

## C Étude du cycle de Hirn

### C.1



- b) La surchauffe permet d'introduire en entrée de turbine de la vapeur sèche, ce qui limite la condensation.

Par ailleurs, le rendement en sera augmenté car le travail récupéré dans la turbine sera plus important pour une même variation de pression.

## C.2 Calcul de l'efficacité avec des tables incomplètes

- a) Le titre massique en vapeur peut être déterminé à partir de la règle des moments :

$$x_v = \frac{s_3 - s_L(T_1)}{s_V(T_1) - s_L(T_1)} \text{ avec } s_3 = s'_2, \text{ la transformation } 2' \rightarrow 3 \text{ étant isentropique.}$$

Au point 2' le système est sous forme de vapeur sèche à la pression de 85,9 bar et à la température de 500 K. On obtient alors :  $x_v = 78,7\%$ .

L'enthalpie correspondante se calcule à partir de la relation :

$$h_3 = h_L(T_1) + x_v \ell(T_1) = h_L(T_1) + x_v (h_V(T_1) - h_L(T_1)) = 2045,7 \text{ kJ.kg}^{-1}$$

- b)  $\eta = 1 + \frac{q_{cond}}{q_{GV}} = 1 + \frac{h_0 - h_3}{h_{2'} - h_1} = \frac{h_L(T_1) - h_3}{h_{2'} - h_L(T_1)} = 42,8\%$ . la surchauffe a bien permis d'augmenter le rendement.

- c) Le cycle de Hirn présente principalement deux avantages par rapport à celui de Rankine :  
 – le travail récupéré lors de la détente de la vapeur surchauffée est plus important  
 – le titre en vapeur supérieur en fin de détente permet de ralentir l'usure des aubages de la turbine.

## Problème II Chauffage d'une maison par une pompe à chaleur (Banque Agro filière TB)

### A Évaluation des pertes thermiques

- A.1 En appliquant le premier principe de la thermodynamique à la maison entre deux instants  $t$  et  $t + dt$ , on obtient :  $dU_{maison} = CdT = \delta Q = -aC(T - T_0)dt$

Soit après séparation des variables  $T$  et  $t$  :  $\frac{dT}{T - T_0} = -adt$

- A.2 L'intégration de l'équation différentielle précédente entre les instants  $t_i$  et  $t$  donne :  $\ln\left(\frac{T(t) - T_0}{T_i - T_0}\right) = -at$  soit :  $T(t) = T_0 + (T_i - T_0)e^{-at}$ .

### B Puissance fournie par la pompe à chaleur

- B.1 La température de la pièce reste constante si la puissance  $P_{th}$  des pertes thermiques est compensée par la puissance  $P_C$  fournie à la pièce par la pompe à chaleur. Il faut donc que :  $P_C = |P_{th}|$  soit  $P_C = aC(T_C - T_0) = 15 \text{ kW}$ .

### C Calcul de l'efficacité

- C.1 Le premier principe appliqué au fluide caloporteur sur un cycle s'écrit :

$$\Delta U = 0 = Q_F + Q_C + W.$$

Le second s'écrit pour un cycle réversible :  $\Delta S = 0 = SeC + SeF = \frac{Q_C}{T_C} + \frac{Q_F}{T_F}$ .

- C.2 L'efficacité est le rapport du transfert énergétique que l'on désire réaliser (on veut chauffer la pièce donc  $Q_C$ ) sur le transfert thermique fourni et ayant un coût (travail fourni par le compresseur donc  $W$ ).

$$e_C = \frac{Q_C}{-Q_F - Q_C} = \frac{T_C}{T_C - T_F} = 20$$

- C.3 On peut écrire l'efficacité sous la forme :  $e_C = \frac{P_C}{P_M}$  donc  $P_M = 1 \text{ kW}$ .

## Problème III Points de champ nul d'une distribution

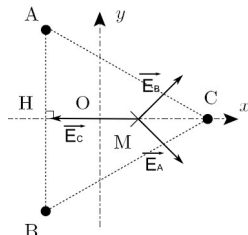
### A Distribution discrète

- A.1 Le point  $O$  est un point de champ nul évident :  $O$  est équidistant des points  $A, B, C$  et les angles  $\widehat{AOC}$  et  $\widehat{COB}$  sont égaux ( $120^\circ$ ), ce qui implique  $\vec{E}_A(O) + \vec{E}_B(O) + \vec{E}_C(O) = \vec{0}$ .

**A.2** Les plans  $(M, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$  et  $(M, \vec{u}_x, \vec{u}_z)$  sont des plans de symétries de la distribution de charge. Le champ appartient donc à ces plans. Le champ  $\vec{E}(M)$  est donc dirigé suivant l'axe  $(Ox)$ .

**A.3** Si  $M \in ]-\infty; H]$  ou si  $M \in [C; +\infty[$  les projections suivant  $\vec{u}_x$  des champs électrostatiques créés par les points  $A, B$  et  $C$  sont de même signe. Le champ ne peut donc pas s'annuler, c'est pourquoi les points de champ nul sont nécessairement situés entre les points  $H$  et  $C$ .

**A.4**



**A.5** Les coordonnées des différents points dans la base  $(x, y)$  sont :  $A(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2})$ ,  $B(-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2})$ ,  $C(1, 0)$  et  $M(x, 0)$ . La projection suivant l'axe  $(Ox)$  du champ créé par les trois charges doit vérifier :  $\frac{q \cos \alpha}{4\pi\epsilon_0 AM^2} + \frac{q \cos \alpha}{4\pi\epsilon_0 BM^2} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 CM^2} = 0$  avec  $\alpha = \widehat{HMA}$ . On obtient alors :

$$\cos \alpha CM^2 (AM^2 + BM^2) = AM^2 BM^2$$

avec  $\cos \alpha = \frac{x + \frac{1}{2}}{\sqrt{AM^2}}$ ,  $AM^2 = BM^2 = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$  et  $CM^2 = (1 - x)^2$ . On obtient alors l'équation suivante.

$$\left( (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} \right)^{\frac{3}{2}} = 2(x + \frac{1}{2})(1 - x)^2$$

**A.6** On obtient graphiquement à l'aide de la calculatrice  $x_0 = -0,285 \text{ m}$

**A.7** Cette distribution possède donc deux points de champ nul.

## B Distribution continue

**B.1** On se place dans le système de coordonnées cylindriques. La distribution est invariante par translation suivant  $\vec{u}_z$  et par rotation d'angle  $\theta$ . La norme du champ électrostatique ne dépend alors que de  $r$ .

**B.2** Les plans  $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$  et  $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$  sont des plans de symétrie de la distribution de charge, Le champ électrostatique en  $M$  appartient donc à l'intersection de ces plans. On a alors  $\vec{E}(M) = E(e)\vec{u}_r$

**B.3**  $\vec{E}(M) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{d\vec{l}PM}{PM^3}$ . On projette cette relation vectorielle suivant  $\vec{u}_r$  et on définit l'angle  $\alpha = \widehat{OMP}$ ,  $E(r) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz \cos \alpha}{PM^2}$ . On fait alors le changement de variable en  $\alpha$ , les bornes d'intégrations deviennent  $-\frac{\pi}{2}$  et  $\frac{\pi}{2}$  et  $dz = \frac{r d\alpha}{\cos^2 \alpha}$ . On obtient alors  $E(r) = \frac{\lambda}{2\pi r}$  soit  $\vec{E}(M) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{u}_r$

**B.4** Lorsque  $r \rightarrow 0$ ,  $E(r) \rightarrow \infty$ , Ce résultat n'est pas physique, lorsque  $r \rightarrow 0$ , on ne peut plus modéliser cette distribution par une distribution linéique : le rayon du fil n'est plus négligeable devant la distance d'observation. Il faudrait donc considérer une distribution volumique de charge.

**B.5** La norme du champ électrostatique tend vers zéro lorsque  $r \rightarrow \infty$ , cette distribution n'a pas de points de champ nul.

**B.6** Le second fil créé au point  $M$  un champ électrostatique similaire au premier fil. On cherche donc des points  $M$  équidistants aux deux fils. Les points de champs nul se situent alors dans le plan des deux fils sur une droite distante de  $\frac{d}{2}$  des deux fils.