

## Correction du devoir surveillé n° 9

### Problème I Mouvements de particules chargées

#### A Action d'un champ électrostatique uniforme

##### A.1 Accélération

**A.1.1** D'après le théorème de l'énergie cinétique :  $\Delta E_c = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = \int q \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = qU$ .

Sachant que  $v_A \approx 0$  on a  $\boxed{qU > 0}$

**A.1.2** On utilise le résultat précédent :  $v_B = \sqrt{\frac{2qU}{m}}$ .

**A.1.3**

$ U $	1 V	1 kV	1 MV
$v \text{ (m.s}^{-1}\text{)}$	$5,9.10^6$	$1,9.10^7$	$5,9.10^8 > c!!!$

##### A.2 Fusion

**A.2.1**  $V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$  et  $E_p = qV = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r}$

**A.2.2** L'énergie mécanique se conserve : A l'instant initial l'énergie mécanique du cation correspond à son énergie cinétique et à l'instant final à son énergie potentiel, soit  $K_0 = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r}$

**A.2.3** AN :  $K_0 = 1,44 \text{ MeV}$

#### B Action d'un champ magnétique uniforme

##### B.1 Caractéristiques générales du mouvement

**B.1.1**  $\frac{F_L}{P} = \frac{qvB}{mg} \approx 10^6$ . Le poids est donc négligeable devant la force de Lorentz.

**B.1.2** Le théorème de l'énergie cinétique permet de montrer que le mouvement est uniforme puisque la force magnétique ne travaille pas. Le mouvement est plan puisque lorsque l'on projette le Principe Fondamental de la Dynamique suivant  $\vec{u}_z$ , on obtient  $\frac{dv_z}{dt} = 0$  soit par intégration  $v_z = cste = 0$  et  $z = cste = 0$ . Le mouvement de la particule se fait donc dans le plan  $z = 0$ .

**B.1.3** On considère le trièdre direct  $(Ox, Oy, Oz)$  tel que la vitesse initiale  $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_x$ . La projection du principe fondamental de la dynamique suivant les axes  $(Ox)$  et  $(Oy)$  conduit à :

$$\begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = -\frac{qB}{m}v_y \\ \frac{dv_y}{dt} = \frac{qB}{m}v_x \end{cases}$$

On pose  $\omega_c = -\frac{qB}{m}$  ( $q < 0$ ) et on résout ce système d'équations différentielles couplées en posant  $u = x + jy$ . On obtient alors  $\frac{du}{dt} + j\omega_c u = 0$  soit  $\dot{u} = v_0 e^{-j\omega_c t}$ .  $u$  s'obtient par intégration en considérant que la particule est en  $O$  (origine du repère) à  $t = 0$  :  $u(t) = \frac{v_0}{j\omega_c}(1 - e^{-j\omega_c t})$ . On obtient alors  $x(t) = \frac{v_0}{\omega_c} \sin \omega_c t$  et  $y(t) = \frac{v_0}{\omega_c}(\cos \omega_c t - 1)$ . On retrouve l'équation paramétrique d'un cercle de rayon  $R = \frac{v_0}{\omega_c} = \frac{mv_0}{|q|B}$  et de centre  $(0, -\frac{v_0}{\omega_c})$ .

**B.1.4** L'application numérique donne  $\boxed{v_0 = \frac{|q|BR}{m} = 7.10^6 \text{ m.s}^{-1}}$ . Cette vitesse est inférieure à  $\frac{c}{10}$ , l'emploi de la mécanique classique était donc justifié.

**B.1.5** Le mouvement de la particule sera la composition d'un mouvement de translation rectiligne uniforme suivant  $\vec{u}_z$  et d'un mouvement circulaire dans le plan  $(Oxy)$ . On aura donc une trajectoire hélicoïdale.

## B.2 Générateur magnétohydrodynamique

**B.2.1** On rencontre un effet similaire à l'effet Hall : les armatures se chargent, créent un champ électrique, puis une force électrique sur les particules qui arrive à compenser la force magnétique. La trajectoire des particules est alors rectiligne uniforme et les charges des armatures sont constantes (un nouveau régime permanent est atteint).

**B.2.2** En régime permanent  $q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) = \vec{0}$  soit  $\vec{E} = \vec{B} \wedge \vec{v}$ .

**B.2.3** On obtient  $E = 1000 \text{ V.m}^{-1}$  et  $V_{A_1} - V_{A_2} = 100 \text{ kV}$

## Problème II Capacité linéique d'une ligne bifilaire

1) On se place dans un système de coordonnées cylindriques. Tous les plans contenant le point  $M$  et l'axe sont des plans de symétries, le champ est donc orienté suivant le vecteur  $\vec{u}_r$ . Le fil étant infini, la distribution de charge est invariante par translation suivant  $\vec{u}_z$  et par rotation d'angle  $\theta$ . On a alors  $\vec{E}(M) = E(r)\vec{u}_r$ . On applique le théorème de Gauss sur un cylindre de rayon  $r$  et de hauteur  $h$  :  $\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_{eff}\epsilon_0}$  avec  $Q_{int} = qh$  et  $\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = E(r)2\pi rh$  d'où

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{2\pi\epsilon_{eff}\epsilon_0 r} \vec{u}_r$$

2) Les plans  $(Pyz)$  et  $(Pxy)$  sont des plans de symétries et il y a une invariance par translation suivant  $\vec{u}_x$  donc  $\vec{E}(P) = E(y)\vec{u}_y$ . L'application du principe de superposition conduit à :

$$\vec{E}(P) = -\frac{1}{2\pi\epsilon_{eff}\epsilon_0} \left( \frac{1}{d-y} + \frac{1}{d+y} \right) \vec{u}_y$$

3)  $\int \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \frac{q}{2\pi\epsilon_{eff}\epsilon_0} \int_{d-a}^{d+a} \left( \frac{1}{d+y} + \frac{1}{d-y} \right) dy = \frac{q}{2\pi\epsilon_{eff}\epsilon_0} [\ln \frac{(d+y)}{(d-y)}]_{d-a}^{d+a} = -\frac{q}{\pi\epsilon_{eff}\epsilon_0} \ln \left( \frac{2d-a}{a} \right)$  et  $\vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -dV$  soit  $\Delta V = \frac{q}{\pi\epsilon_{eff}\epsilon_0} \ln \frac{2d}{a}$  puisque  $d \gg a$ .

4)  $dQ = qd\ell$

5)  $C = \frac{Q}{\Delta V}$ , et  $\Gamma = \frac{C}{d\ell}$  soit  $\Gamma = \frac{\pi\epsilon_0\epsilon_{eff}}{\ln \frac{2d}{a}}$

## Problème III Champ de gravitation terrestre

1)  $\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_{1 \rightarrow 2}$  soit  $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$ .

2) Le flux du champ électrostatique à travers une surface fermée est égal à la charge intérieure au volume défini par la surface fermée divisé par la permittivité du vide :  $\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$

3)  $\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{u}_{1 \rightarrow 2}$  d'où  $\vec{G} = -G \frac{m}{r^2} \vec{u}_r$

	Électrostatique	Gravitation
sources	charges $q$	masse $m$
4) Loi de Forces	$\vec{F} = q\vec{E}$	$\vec{F} = m\vec{G}$
Champ	$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{u}$	$\vec{G} = -G \frac{m}{r^2} \vec{u}$
Constante	$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$	$-G$

Théorème de Gauss pour la gravitation  $\oiint \vec{G} \cdot d\vec{S} = -4\pi GM_{int}$

5) a) On considère un système de coordonnées sphériques. Tous les plans contenant  $M$  et le centre de la Terre sont des plans de symétries donc  $\vec{G}(M) = G(M)\vec{u}_r$ . La distribution de masse est invariante par rotation d'angle  $\theta$  et  $\varphi$  donc  $\vec{G}(M) = G(r)\vec{u}_r$ .

•  $r > R_T$  : On applique le théorème de Gauss sur une sphère de rayon  $r$  :  $\oiint \vec{G} \cdot d\vec{S} = G(r)4\pi r^2 = -4\pi GM_{int} = -4\pi GM_T$ , soit  $G(r) = -\frac{GM_T}{r^2} \vec{u}_r$

- $r < R_T$  La densité volumique de la Terre est égale à  $\rho = \frac{M_T}{\frac{4}{3}\pi R_T^3} = \frac{3M_T}{4\pi R_T^3}$ . On applique le théorème de Gauss à une sphère de rayon  $r$  :  $\oiint \vec{G} \cdot d\vec{S} = G(r)4\pi r^2 = -4\pi GM_{int} = -4\pi G\rho \frac{4}{3}\pi r^3$ , soit  $G(r) = -\frac{GM_T r}{R_T^3} \vec{u}_r$

b)  $G_0 = \|\vec{G}_T\| = \frac{GM_T}{R_T^2} = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$ .

- 6)  $G_0$  reste identique puisque la masse de la Terre reste identique (La masse intérieure reste inchangée dans l'application du théorème de Gauss); dans cette modélisation, c'est la masse volumique qui ne peut plus être considérée comme homogène (elle dépend donc de  $r$ ).
- 7) On trouve que  $\|\vec{G}\|$  suit une loi linéaire lorsque  $0 < r < R_1$  :  $\|\vec{G}\| = G_0 \frac{r}{R_1}$ . Dans la modélisation faite précédemment (où on considèrerait la Terre homogène), on trouvait également une relation linéaire ( $G(r) = -\frac{GM_T r}{R_T^3} \vec{u}_r$ ), on peut donc considérer le noyau terrestre comme homogène.

En utilisant le théorème de Gauss, l'expression de  $\|\vec{G}\| = G_0 \frac{r}{R_1}$  permet de retrouver la masse intérieure à une sphère de rayon  $r$  soit  $M_{int} = \frac{r^3}{R_1^3} \frac{G_0}{G}$  soit  $\rho_{moy} = \frac{3M_T}{4\pi R_1 R_T^2} = 1,010^4 \text{ kg.m}^{-3}$

- 8) Lorsque  $\rho$  est uniforme  $\|\vec{G}(r)\|$  est croissant, donc si  $\|\vec{G}\|$  est constant  $\rho$  devrait être décroissant.

Pour  $R_1 < r < R_T$ , l'application du théorème de Gauss donne  $G(r) = G_0 = \frac{GM_{int}(r)}{r^2}$  d'où  $M_{int}(r) = \frac{G_0}{G} r^2$  or  $M_{int}(r) = M_{noyau} + M_{manteau}(r)$  avec  $M_{noyau} = \frac{R_1^3 G_0}{G}$  soit  $M_{manteau}(r) = \frac{G_0}{G} (r^2 - R_1^2)$ . On différencie cette expression pour obtenir la masse volumique du manteau :  $\rho_{manteau} = \frac{dM_{manteau}}{d\tau} = \frac{\frac{G_0}{G} 2r dr}{4\pi r^2 dr}$ , soit  $\rho_{manteau} = \frac{G_0}{2\pi r G}$ . La masse volumique est bien une fonction décroissante de  $r$ .

## Problème IV Étude d'un multivibrateur astable

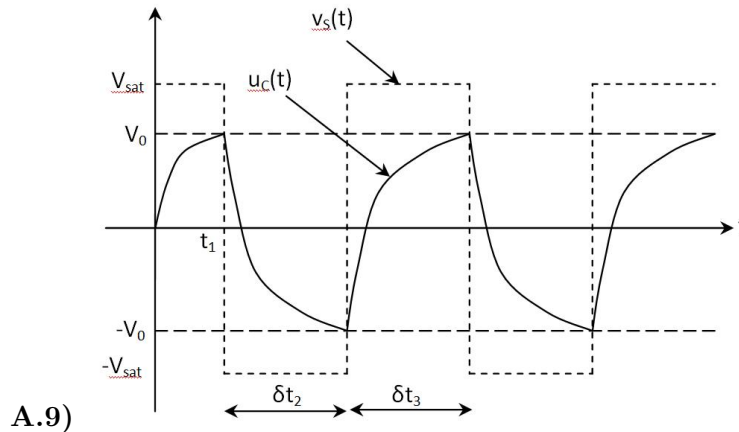
### A Étude du multivibrateur astable

- A.1) On peut écrire à partir d'une loi des mailles :  $u_C(t) + u_R(t) = +V_{sat}$  avec  $i_R = i_C(t) = C \frac{du_C}{dt}$ , le courant d'entrée  $i_-$  de l'A.O. idéal étant nul.  
On obtient alors l'équation différentielle suivante :  $\frac{du_C}{dt} + \frac{u_C(t)}{RC} = \frac{V_{sat}}{RC}$ .
- A.2) Le condensateur étant initialement déchargé :  $u_C(t) = V_{sat} (1 - e^{-t/RC})$ .
- A.3) Le basculement de la sortie de l'A.O. correspond à l'annulation de sa tension différentielle d'entrée :  $V_{E-} = V_{E+}$  soit :  $u_C(t_1) = V_0 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{sat}$
- A.4) A l'instant  $t_1$  de basculement :  $u_C(t_1) = V_0 = V_{sat} (1 - e^{-t_1/RC})$  soit  $t_1 = -RC \ln \left(1 - \frac{V_0}{V_{sat}}\right)$ .
- A.5) L'équation différentielle pour  $t > t_1$  s'obtient en remplaçant  $+V_{sat}$  par  $-V_{sat}$  dans l'équation différentielle de la première phase :  $\frac{du_C}{dt} + \frac{u_C(t)}{RC} = \frac{-V_{sat}}{RC}$
- A.6) Pour  $t > t_1$ , en prenant l'instant  $t_1$  comme nouvelle origine des temps, on obtient :  $u_C(t') = -V_{sat} + Ae^{-t'/RC}$ .  
La constante d'intégration est déterminée en utilisant la continuité de la tension  $u_C(t')$  aux bornes du condensateur à l'instant  $t' = 0$  :  $u_C(t' = 0_-) = u_C(t' = 0_+)$  soit  $V_0 = -V_{sat} + A$ .  
La tension aux bornes de C a lors pour expression :  $u_C(t') = -V_{sat} + (V_0 + V_{sat}) e^{-t'/RC}$ .
- A.7) Cette deuxième phase se prolonge jusqu'à l'annulation de la tension différentielle d'entrée soit jusqu'à ce que  $u_C(\Delta t_2) = -V_0$ . On obtient alors :  $\Delta t_2 = RC \ln \left(\frac{V_0 + V_{sat}}{V_{sat} - V_0}\right)$ .
- A.8) Lors de la troisième phase, la sortie de l'A.O. est en saturation haute. L'équation différentielle vérifiée par  $u_C$  correspond à celle du 1. La tension aux bornes de C est donc de la forme :  $u_C(t'') = V_{sat} + Be^{-t''/RC}$  en prenant l'instant de basculement de  $-V_{sat}$  à  $+V_{sat}$  comme

nouvelle origine des temps. Par continuité de la tension aux bornes de C à l'instant  $t'' = 0$ , on obtient :  $u_C(t'') = V_{sat} - (V_0 + V_{sat}) e^{-t''/RC}$ .

La troisième phase prend fin lorsque :  $u_C(\Delta t_3) = -V_0$ . Elle dure donc  $\Delta t_3 = RC \ln \left( \frac{V_0 + V_{sat}}{V_{sat} - V_0} \right)$ .

On remarque que  $\Delta t_2 = \Delta t_3$  : les signaux sont symétriques.



A.10) Le signal obtenu en sortie d'A.O. est un signal crête à crête.

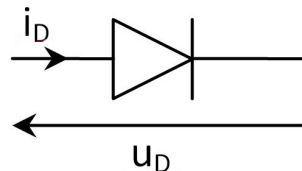
A.11) Les phases successives de charge et de décharge du condensateur seront triangulaires si la durée caractéristique de la charge (ou de la décharge) est très grande par rapport à la durée de la phase considérée. Il faut donc  $RC \gg \Delta t_2$  soit  $R_2 \gg R_1$ .

A.12) La période du signal est  $T = \Delta t_2 + \Delta t_3 = 2\Delta t_2 = 2RC \ln \left( 1 + \frac{2R_1}{R_2} \right)$ .

## B Obtention de signaux asymétriques

B.1) Les phases de saturation positive et négative étant de même durée :  $\delta = 0,5$ .

B.2) On adopte les notations suivantes :



On fait l'hypothèse que la diode  $D_1$  est passante. Elle peut dans ce cas être modélisée par un fil. La tension à ses bornes doit donc être nulle et le courant  $i_{D1}$  la traversant positif (d'après la convention précédente).

La tension aux bornes de  $R'_1$  s'écrit :  $u_{R'_1} = R'_1 i_{D1} = u_C(t) - V_{sat} < 0$  donc  $i_{D1} < 0$  : la diode  $D_1$  est bloquée.

On fait l'hypothèse que la diode  $D_2$  est bloquée. Elle peut dans ce cas être modélisée par un interrupteur ouvert. La tension à ses bornes  $u_{D2}$  doit donc être négative et le courant  $i_{D1}$  la traversant nul (d'après la convention précédente).

La tension aux bornes de  $R'_2$  étant nulle (courant  $i_{D2}$  nul),  $u_{D2} = V_{sat} - u_C(t) > 0$  : la diode  $D_2$  est donc passante.

B.3) On est ramené au circuit précédent avec  $R = R'_2$ . Cette phase dure donc  $\Delta t'_2 = R'_2 C \ln \left( \frac{V_0 + V_{sat}}{V_{sat} - V_0} \right)$ .

B.4) On montre par un raisonnement analogue à celui de la question 2 que  $D_1$  est passante et  $D_2$  bloquée.

B.5) On est ramené au circuit précédent avec  $R = R'_1$ . Cette phase dure donc  $\Delta t'_3 = R'_1 C \ln \left( \frac{V_0 + V_{sat}}{V_{sat} - V_0} \right)$ .

B.6)  $\delta = \frac{\Delta t'_2}{T} = \frac{\Delta t'_2}{\Delta t'_2 + \Delta t'_3} = \frac{R'_2}{R'_2 + R'_1}$ .