

Devoir surveillé n° 9

Électrostatique & Électronique

- La durée de l'épreuve est de 4 heures. Les candidats ne sont pas autorisés à sortir avant la fin du temps prévu.
- L'usage de la calculatrice est autorisé.
- Tous les problèmes et exercices sont indépendants.
- Les résultats devront être encadrés.
- Toute application numérique ne comportant pas d'unité sera considérée comme fausse.
- Les résultats littéraux non homogènes entraîneront la perte de tous les points de la question.

Problème I Mouvements de particules chargées

Tous les mouvements sont envisagés dans un référentiel galiléen.

Données :

- vitesse de la lumière : $c = 3.10^8 m.s^{-1}$;
- $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9.10^9 m.F^{-1}$;
- charge élémentaire $e = 1,6.10^{-19} C$;
- masse de l'électron $m_e = 9,1.10^{-31} kg$, masse du proton et du neutron : $m_p = m_n = 1,67.10^{-27} kg$;
- Deutérium : ${}^2_1D = {}^2_1H$; isotope de l'hydrogène dont le noyau comporte un proton et un neutron, présent dans l'eau de mer.
- Tritium : ${}^3_1D = {}^3_1H$; isotope de l'hydrogène dont le noyau comporte un proton et deux neutrons, produit par bombardement neutronique du lithium.

A Action d'un champ électrostatique uniforme

A.1 Accélération

Une particule de charge q et de masse m , de vitesse initiale très faible, est accélérée entre deux électrodes A et B par une différence de potentiel $U = V_A - V_B$; la particule se déplace de A vers B .

A.1.1 Quel est le signe du produit qU ?

A.1.2 Établir le plus simplement possible l'expression de la vitesse de la particule en fin d'accélération, en fonction de sa masse et du produit qU .

A.1.3 Application numérique : Calculer la vitesse atteinte pour des tensions accélératrices $|U|$ de 1 V, 1 kV et 1 MV. Commentez si nécessaire les valeurs obtenues.

A.2 Fusion

L'énergie nucléaire est actuellement exploitée grâce à des réactions de fission de noyaux lourds. La fusion de noyaux légers, a priori plus intéressante, est en cours d'expérimentation.

La fusion met en jeu « l'interaction forte » entre nucléons, or cette interaction n'a qu'une très courte portée, de l'ordre du femtomètre ($1 fm = 10^{-15} m$). D'autre part, les noyaux, porteurs de charges de même signe, se repoussent les uns les autres. Il faut donc vaincre cette répulsion coulombienne pour rendre la fusion possible. Les questions suivantes vont donner un ordre de grandeur des énergies à mettre en oeuvre.

On considère un cation de charge Q , considéré ponctuel, seul dans l'espace, fixe en O , origine d'un repère de coordonnées sphériques.

- A.2.1** Rappeler l'expression du potentiel électrostatique créé par cette charge en tout point de l'espace, ce potentiel étant pris nul à l'infini. Quelle est alors l'énergie potentielle d'un ion de charge q situé à la distance r de Q ?
- A.2.2** Exprimer l'énergie cinétique minimale K_0 à communiquer à un cation de charge q et de masse m , initialement très éloigné de Q fixe en O , pour qu'il puisse s'en approcher à la distance r .
- A.2.3** Application numérique : calculer en électronvolts l'énergie cinétique minimale à communiquer à un noyau de deutérium initialement très éloigné d'un noyau-cible de tritium, pour qu'il puisse s'en approcher à la distance de 1 fm .

B Action d'un champ magnétique uniforme

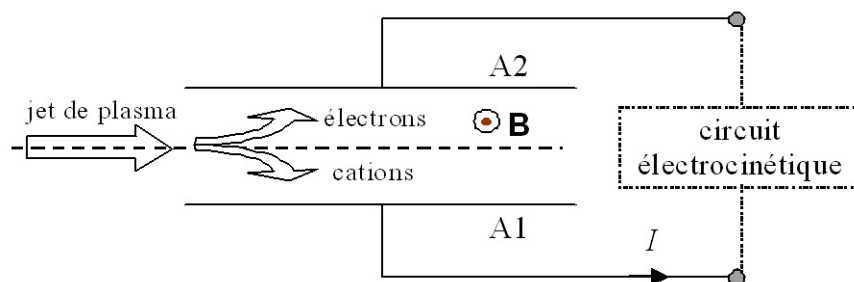
B.1 Caractéristiques générales du mouvement

Une particule chargée ($q < 0$) pénètre en O dans une région de l'espace où existe un champ magnétique uniforme et constant \vec{B} qui oriente l'axe z : $\vec{B} = B\vec{u}_z$. La vitesse \vec{v}_0 de la particule lorsqu'elle arrive en O est perpendiculaire à \vec{B} .

- B.1.1** On envisage un champ de l'ordre du tesla, et des particules pour lesquelles les ordres de grandeur sont donnés en préambule. Montrer qu'en présence du champ magnétique, on ne tiendra pas compte du poids.
- B.1.2** Montrer que le mouvement de la particule est uniforme, et dans un plan que l'on précisera.
- B.1.3** Montrer que la trajectoire est un cercle dont on exprimera le rayon en fonction de v_0 , q , B et m .
- B.1.4** Application numérique : un appareil pédagogique permet de visualiser la trajectoire d'électrons émis sous forme d'un faisceau étroit et homocinétique ; lorsqu'on place l'appareil entre deux bobines de Helmholtz produisant un champ pratiquement uniforme de 10^{-3} T , on observe que le faisceau d'électrons décrit un cercle de 4 cm de rayon. Calculer la vitesse des électrons. L'emploi de la mécanique classique était-il justifié ?
- B.1.5** Sans aucun calcul supplémentaire, décrire la trajectoire si $\vec{v} = \vec{v}_0 + v_1\vec{u}_z$ (en O).

B.2 Générateur magnétohydrodynamique

On envisage le dispositif schématisé sur la figure suivante ; A_1 et A_2 sont des armatures métalliques planes perpendiculaires au plan de figure, distantes de D :



Principe de fonctionnement : un dispositif non représenté ionise des gaz de combustion d'hydrocarbures pour produire un jet de plasma (mélange d'ions positifs et d'électrons). Lorsque ce plasma subit le champ magnétique \vec{B} uniforme entre les armatures, les électrons et les cations sont déviés de part et d'autre de la direction initiale du jet. Recueillis par l'armature A_2 , les électrons peuvent alors circuler dans le circuit électrocinétique pour rejoindre l'armature A_1 : on a donc réalisé un générateur qui fait circuler un courant conventionnel d'intensité I de A_1 vers A_2 dans le circuit : $I > 0$.

On se propose de déterminer la force électromotrice de ce générateur : comme on sait qu'il s'agit de trouver sa tension à vide, on envisage dans la suite le dispositif de la figure, mais sans connecter le générateur à un circuit : il ne fournit donc aucun courant, $I = 0$.

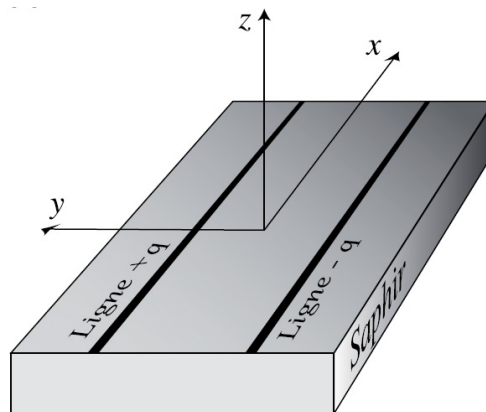
B.2.1 Les armatures étant initialement déchargées, le champ \vec{B} est appliqué à partir de $t = 0$ au jet de plasma. Expliquer sans calcul ce qui se passe au niveau des armatures A_1 et A_2 ; en déduire qualitativement l'évolution vers un régime permanent dans lequel le jet de plasma traverse l'espace entre les plaques sans être dévié.

B.2.2 Montrer que ce régime permanent correspond à l'existence entre A_1 et A_2 d'un champ électrique \vec{E} que l'on exprimera en fonction du champ \vec{B} et de la vitesse \vec{v} des particules du jet.

B.2.3 Application numérique : $v = 500\text{m.s}^{-1}$, $B = 2\text{ T}$, $D = 1\text{ cm}$; en supposant le champ uniforme entre les armatures, calculer la tension à vide $V_{A_1} - V_{A_2}$.

Problème II Capacité linéique d'une ligne bifilaire

On considère deux fils infinis parallèles portant chacun respectivement la charge $+q$ et $-q$ par unité de longueur. Ces fils sont déposés sur un substrat de saphir qui est un milieu diélectrique linéaire et isotrope. Le demi-espace $z < 0$ est occupé par le saphir et le demi-espace $z > 0$ est occupé par le vide.



Pour les calculs d'électrostatique de cette partie, il suffira d'employer les théorèmes classiques (théorème de Gauss par exemple) en remplaçant la permittivité du vide ϵ_0 par $\epsilon_{eff}\epsilon_0$ une permittivité effective qui tient compte du fait qu'une partie de l'espace est occupée par le saphir.

1) Soit un fil infini portant la charge linéique $+q$. Calculer le champ électrique créé en tout point M de l'espace en fonction de r (distance de M au fil). On justifiera proprement le calcul (symétries, invariances, théorème utilisé...).

On appelle $2d$ la distance séparant les deux fils, ainsi le fil « positif » est situé en $y = +d$ et le fil « négatif » en $y = -d$.

2) En déduire le champ électrique créé en tout point P du plan $z = 0$ (plan sur lequel se situent les deux fils).

Les fils ne sont pas infiniment minces : soit $2a$ leur épaisseur, négligeable devant la distance les séparant.

3) Calculer la circulation du champ électrique sur un chemin allant d'un point du bord de la ligne portant la charge linéique $+q$ (abscisse $d - a$) à un point du bord de la ligne portant la charge $-q$ (abscisse $-d + a$). En déduire la différence de potentiel qui règne entre ces deux fils.

En isolant une portion de ligne bifilaire de longueur dl , tout se passe comme si l'on était en présence d'un condensateur.

- 4) Quelle est la charge portée par chaque armature ?
- 5) En déduire la capacité de ce condensateur puis la capacité linéique Γ de la ligne bifilaire en fonction de ϵ_{eff} , d et a .

Problème III Champ de gravitation terrestre

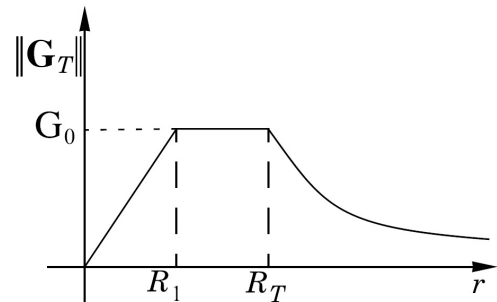
La connaissance du champ de pesanteur terrestre est fort utile dans de multiples domaines scientifiques. Sa variabilité spatiale nous renseigne sur la constitution interne de notre planète, sa variabilité temporelle sur les mouvements verticaux de la surface de la Terre. Les domaines d'application sont nombreux : de la prospection archéologique et minière, à l'étude des marées terrestres et l'orbitographie satellitaire.

Données numériques

Constante de gravitation universelle	$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2 \text{ kg}^{-2}$
Permittivité électrique du vide	$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{12} \text{ F.m}^{-1}$
Masse de la Terre	$M_T = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$
Rayon de la Terre	$R_T = 6,38 \cdot 10^3 \text{ km}$

- 1) Exprimer la force électrostatique exercée par une charge ponctuelle q_1 sur une charge ponctuelle q_2 et faire un schéma précisant clairement les notations utilisées. En déduire le champ électrostatique \vec{E} créé par une charge ponctuelle q .
- 2) Énoncer le théorème de Gauss de l'électrostatique.
- 3) Exprimer la force gravitationnelle $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$ exercée par une masse ponctuelle m_1 sur une masse ponctuelle m_2 . En déduire le champ gravitationnel \vec{G} créé par une masse ponctuelle m .
- 4) Dresser un tableau présentant les analogies entre les grandeurs électrostatiques et les grandeurs gravitationnelles. En déduire le théorème de Gauss pour le champ gravitationnel créé par une distribution de masses quelconques.
- 5) Dans un premier temps, on assimile la Terre à une sphère de centre O , de rayon R_T et de masse M_T uniformément répartie dans tout le volume.
 - a) Déterminer le champ gravitationnel terrestre \vec{G}_T en tout point M de l'espace et représenter graphiquement $\|\vec{G}_T\|$ en fonction de $r = OM$.
 - b) Calculer $G_0 = \|\vec{G}_T\|$ à la surface de la Terre.

En réalité la masse M_T n'est pas uniformément répartie. Dans un modèle plus élaboré dans lequel on suppose la symétrie sphérique conservée, les variations de $\|\vec{G}_T\|$ sont représentées sur la figure ci-contre avec $R_1 = 3,50 \cdot 10^3 \text{ km}$.



- 6) Justifier que le champ gravitationnel à la surface de la Terre n'est pas modifié.
- 7) Justifier que dans ce modèle, on considère le noyau terrestre ($0 < r < R_1$) comme homogène. Calculer sa masse volumique moyenne.
- 8) Dans le manteau terrestre ($R_1 < r < R_T$), la masse volumique est-elle supposée fonction croissante ou décroissante de r ? Justifier.

Problème IV Étude d'un multivibrateur astable

Un multivibrateur, appelé aussi « bascule », est un circuit qui possède deux états de fonctionnement. Le multivibrateur astable présente deux états de fonctionnement instables, la commutation d'un état à l'autre se faisant spontanément et indéfiniment.

A Étude du multivibrateur astable

On étudie le montage de la figure 1.

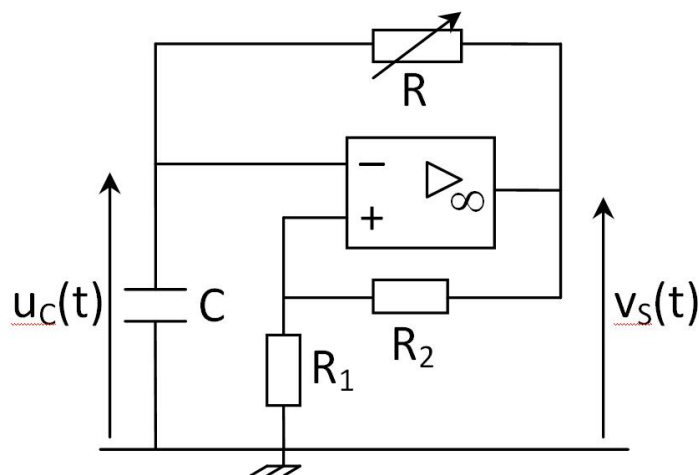


FIG. 1 – Multivibrateur astable

L'amplificateur opérationnel est supposé idéal et fonctionne en régime saturé : la tension de sortie de l'amplificateur peut donc prendre les deux valeurs $+V_{sat}$ ou $-V_{sat}$. Les seules sources de tension sont les alimentations continues de l'amplificateur opérationnel.

On s'intéresse dans un premier temps à une phase de fonctionnement pendant laquelle la tension de sortie de l'amplificateur opérationnel est : $v_S = +V_{sat}$.

- A.1) Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur.
- A.2) Donner l'expression de $u_C(t)$ en considérant le condensateur initialement déchargé.
- A.3) On note V_0 la valeur de $u_C(t)$ lors du basculement de la sortie de l'amplificateur opérationnel de $+V_{sat}$ à $-V_{sat}$. Déterminer son expression.
- A.4) Déterminer l'instant t_1 de basculement.

On s'intéresse maintenant à la phase suivante de fonctionnement du montage (après t_1).

- A.5) Déterminer la nouvelle équation différentielle vérifiée par la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur.
- A.6) Donner l'expression de $u_C(t)$ après l'instant t_1 . On pourra utiliser une nouvelle origine des temps correspondant à l'instant t_1 .
- A.7) Déterminer la durée Δt_2 de cette deuxième phase.

Les basculements se succédant indéfiniment, on obtient des signaux périodiques.

- A.8) Déterminer la durée Δt_3 de la troisième phase.
- A.9) Dessiner l'allure des tensions $u_C(t)$ et $v_S(t)$ sur quelques périodes en faisant apparaître les tensions, les instants de basculement et les durées caractéristiques de chacune des phases.
- A.10) Quel type de générateur a-t-on réalisé avec v_S ?
- A.11) A quelle condition sur les valeurs de R_1 et R_2 a-t-on réalisé un générateur de signaux triangulaires avec u_C ? Expliquer votre raisonnement.

- A.12)** Montrer alors que la période de ces deux signaux a pour expression : $T = 2RC \ln \left(1 + 2\frac{R_1}{R_2} \right)$.
 On pourra considérer que les phases sur lesquelles $v_S(t) = +V_{sat}$ sont de même durée que celles sur lesquelles $v_S(t) = -V_{sat}$.

B Obtention de signaux asymétriques

Le montage de la figure 2 permet d'obtenir des signaux pour lesquelles les deux phases ne sont pas de même durée.

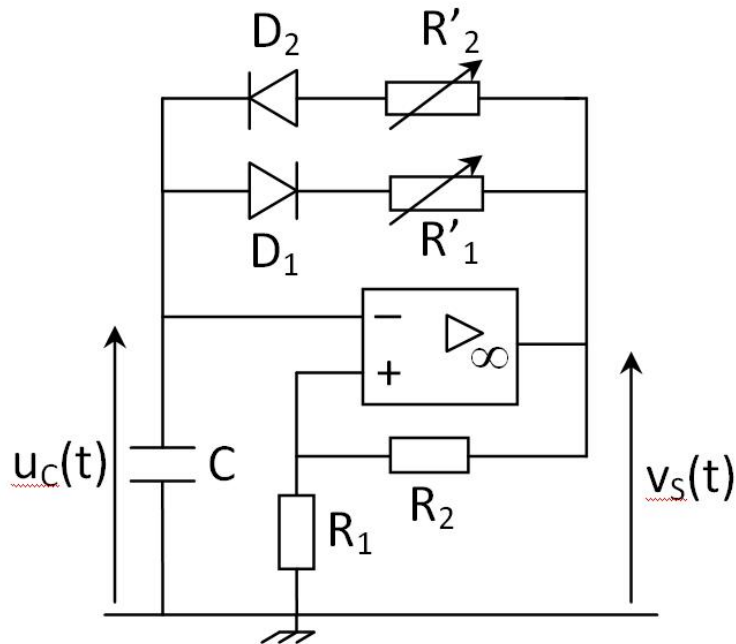


FIG. 2 – Obtention de signaux asymétriques

On appelle rapport cyclique, noté δ , le rapport entre la durée de l'état de saturation positive et la période du signal.

- B.1)** Quelle était la valeur du rapport cyclique dans le montage de la première partie ?

L'amplificateur opérationnel est supposé idéal et fonctionne en régime saturé. Les diodes sont également supposées idéales avec une tension seuil nulle.

On s'intéresse dans un premier temps à une phase de fonctionnement pendant laquelle la tension de sortie de l'amplificateur opérationnel est : $v_S = +V_{sat}$.

- B.2)** Montrer que la diode D_2 est passante et que la diode D_1 est bloquée.

- B.3)** En déduire la durée $\Delta t'_2$ de cette phase de fonctionnement.

On s'intéresse maintenant à une phase de fonctionnement pendant laquelle la tension de sortie de l'amplificateur opérationnel est : $v_S = -V_{sat}$.

- B.4)** Montrer que la diode D_1 est passante et que la diode D_2 est bloquée.

- B.5)** En déduire la durée $\Delta t'_3$ de cette phase de fonctionnement.

- B.6)** Montrer que le rapport cyclique de ce montage a pour expression : $\delta = \frac{R'_2}{R'_2 + R'_1}$.