

Correction du devoir surveillé n° 2

Problème I Étude d'un doublet

A Doublet comportant deux lentilles

A.1 L'angle que fait le rayon lumineux avec l'axe optique diminue après la traversée du système optique. Le système est donc globalement convergent.

A.2 La lentille L_1 est convergente (le rayon se rapproche de l'axe optique) et la lentille L_2 est divergente (le rayon lumineux s'écarte de l'axe optique).

A.3 On trace la parallèle au rayon incident passant par O_1 , cette parallèle coupe le rayon émergent de L_1 en un point dont le projeté sur l'axe optique est le foyer image F'_1 . On trace la parallèle au rayon émergent de L_1 , passant par O_1 , cette parallèle coupe le rayon incident en un point dont le projeté sur l'axe optique est le foyer objet F_1 . Les deux foyers sont bien symétriques par rapport au centre optique O_1 et leurs positions confirment que la lentille L_1 est bien convergente. On obtient $\overline{O_1F'_1} = 4a$. On obtient de même les positions des foyers de L_2 . Ils sont bien symétriques par rapport au centre optique O_2 et leurs position confirment que la lentille L_2 est bien divergente. On obtient $\overline{O_2F'_2} = -2a$.

A.4 Le foyer objet F d'un système optique est le point de l'axe optique dont l'image, par le système optique, est rejetée à l'infini. Pour l'obtenir graphiquement, on trace un rayon émergent parallèle à l'axe optique. Entre les deux lentilles, ce rayon ou plutôt son prolongement passe par le foyer F_2 . On trace la parallèle à ce rayon émergent de L_1 , passant par O_1 , cette parallèle coupe le plan focal objet de L_1 en un point par lequel passe le rayon incident. L'intersection de ce rayon incident avec l'axe optique correspond au foyer F . On peut lire $\overline{O_1F} = -8a$.

Le foyer image d'un système optique est l'image du point à l'infini sur l'axe optique. Pour l'obtenir graphiquement, on trace un rayon incident parallèle à l'axe optique. Entre les deux lentilles, ce rayon passe par le foyer F'_1 . On trace la parallèle à ce rayon émergent de L_1 passant par O_2 , cette parallèle coupe le plan focal image de L_2 en un point par lequel passe le rayon émergent. L'intersection de ce rayon émergent avec l'axe optique correspond au foyer F' . On peut lire $\overline{O_1F'} = 5a$.

A.5 On utilise le schéma suivant pour le calcul de la position de F : $F \xrightarrow{L_1} F_2 \xrightarrow{L_2} \infty$. On applique la formule de Newton à la lentille L_1 : $\overline{F_1FF'_1F_2} = -f_1'^2$. D'où $\overline{O_1F} = \overline{O_1F_1} + \overline{F_1F} = -f_1' + \frac{f_2'^2}{F_1F_2}$. Soit $\overline{O_1F} = -7,2 \text{ cm}$

On utilise le schéma suivant pour le calcul de la position de F' : $\infty \xrightarrow{L_1} F'_1 \xrightarrow{L_2} F'$. On applique la formule de Newton à la lentille L_2 : $\overline{F_2F'_1F'_2F'} = -f_2'^2$ et $\overline{O_1F'} = \overline{O_1F'_2} + \overline{F'_2F'} = \overline{O_1O_2} + f_2' - \frac{f_2'^2}{F_2F'_1}$. L'application numérique donne : $\overline{O_1F'} = 5,8 \text{ cm}$

B Doublet comportant une lentille et un miroir

B.1 voir document réponse.

B.2 On trace un rayon parallèle au rayon incident passant par O_3 . Le prolongement du rayon émergent de la lentille L_3 coupe ce rayon dans le plan focal image. On en déduit $\overline{O_3F'_3} = -2,8a$.

Pour trouver la position de F_3 , on trace un rayon parallèle au rayon émergent de L_3 passant par O_3 . L'intersection du rayon incident et de ce rayon se trouve dans le plan focal objet. On vérifie que F_3 et F'_3 sont bien symétriques par rapport à O_3 .

Pour trouver la position du foyer principal F_4 , on trace un rayon parallèle au rayon incident au miroir passant par S_4 . Ce rayon réfléchi symétriquement par rapport à l'axe optique et il coupe le rayon émergent du miroir dans le plan focal du miroir. Pour déterminer la position de C , on sait que F est au milieu du segment SC . On mesure alors $\overline{S_4F_4} = -3,8a$ et on en déduit $\overline{S_4C_4} = -7,6a$.

B.3 Voir document réponse. Ce système est globalement divergent.

B.4 D'après les résultats précédent, la lentille L_3 est une lentille divergente et le miroir M_4 est concave.

B.5 Si le point C_4 est confondu avec le point O_3 , le rayon qui passe par B et O_3 n'est pas dévié par le système optique. L'image B' de B se trouve donc sur la droite BO_3 et pour trouver sa position il faut tracer le cheminement d'un deuxième rayon lumineux à travers ce système optique.

Problème II Étude d'un appareil photo jetable

A Étude de la partie optique

A.1 Conditions de Gauss

A.1.1 Les rayons incidents sont peu inclinés et peu éloignés de l'axe optique.

A.1.2 On se place dans les conditions de Gauss pour avoir un stigmatisme et un aplanétisme approché.

A.1.3 En pratique, on concentre les rayons lumineux vers le centre du système optique ou, on utilise un diaphragme pour respecter les conditions de Gauss au détriment de la luminosité.

A.2 L'image d'un objet réel à travers une lentille divergente est virtuelle. La lentille L servant d'objectif est donc une lentille convergente.

A.3 Si l'objet est à l'infini, son image se formera dans le plan focal image de la lentille. Il faut donc mettre la pellicule dans ce plan, soit $d = f'$

A.4 $\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{X/2}{f'}$ soit $X = 2 \tan \alpha f' = 2,6 \cdot 10^{-4} \text{ m}$

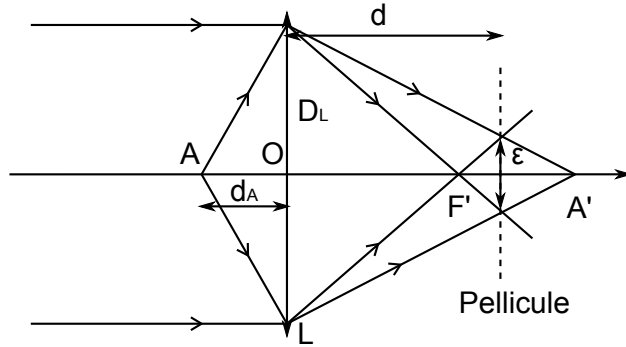
A.5

A.5.1 D'après la relation de conjugaison de Descartes on a : $\frac{1}{\overline{OA'}} + \frac{1}{d_A} = \frac{1}{f'}$ car $d = -\overline{OA}$, soit $\overline{OA'} = \frac{d_A f'}{d_A - f'}$.

A.5.2 D'après le théorème de Thalès, on a : $\frac{D_{A'}}{D_L} = \frac{\overline{OA'} - f'}{\overline{OA'}}$ et d'après la question précédente, on a : $\overline{OA'} - f' = \frac{f'^2}{d_A - f'}$ soit : $D_{A'} = D_L \frac{f'}{d_A}$

A.6 Cela revient à dire $D_{A'} = \epsilon$, soit d'après la relation précédente : $d_A = \frac{D_L f'}{\epsilon}$. L'application numérique donne $d_A = 3,0 \text{ m}$

A.7



A.7.1

A.7.2 D'après le théorème de Thalès, on a : $\frac{D_L}{\epsilon} = \frac{f'}{d-f'}$ soit $d = f' + \frac{f'\epsilon}{D_L} = 3,03 \text{ cm}$

A.7.3 À partir de la relation de Thalès on détermine la position de A' : $\frac{\overline{OA'}}{D_L} = \frac{\overline{OA'}-d}{\epsilon}$ soit $\overline{OA'} = \frac{dD_L}{D_L-\epsilon}$ et d'après la relation de conjugaison de Descartes on a : $\frac{1}{d_A} = \frac{1}{f'} - \frac{1}{\overline{OA'}}$ soit $d_A = \frac{f'\overline{OA'}}{\overline{OA'}-f'}$ et en remplaçant $\overline{OA'}$, on obtient $d_A = \frac{f'dD_L}{dD_L-f'(D_L-\epsilon)} = 1,5 \text{ m}$. On obtient alors une photo nette lorsque l'objet est situé au delà de 1,5 m de la pellicule. On a augmenté la profondeur de champ de l'appareil photo.

B Étude du circuit primaire du flash

B.1 Au bout d'un temps très long, le circuit a atteint un régime permanent et les grandeurs sont des constantes. On en déduit $u_L(\infty) = L \frac{di(\infty)}{dt} = 0$

B.2 Juste après la fermeture de l'interrupteur, l'intensité qui traverse la bobine et la tension aux bornes du condensateur sont continus. Soit $i(t=0^+) = 0$ et $u_C(t=0^+) = 0$ (condensateur initialement déchargé). D'après la loi des mailles on obtient $u_L(t=0^+) = E$.

B.3 La loi des mailles nous permet d'écrire : $E = r_i i + u_C + u_L$. En dérivant cette équation et en remplaçant $\frac{du_C}{dt}$ par $\frac{i}{C}$ et $\frac{du_L}{dt}$ par $L \frac{d^2 i}{dt^2}$ on obtient l'équation différentielle vérifiée par le courant $i(t)$: $\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{r_i}{L} \frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = 0$. En dérivant une deuxième fois l'équation donnée par la loi des mailles on obtient $r_i \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{1}{C} \frac{di}{dt} + \frac{d^2 u}{dt^2} = 0$ et en remplaçant $\frac{di}{dt}$ par $\frac{u_L}{L}$, on obtient :

$$\frac{d^2 u_L}{dt^2} + \frac{r_i}{L} \frac{du_L}{dt} + \frac{1}{LC} u_L = 0$$

B.4 Pour avoir un régime pseudo-périodique, il faut que le discriminant de l'équation caractéristique soit négatif. En cherchant des solutions de l'équation différentielle ci-dessus sous la forme e^{rt} on obtient : $r^2 + \frac{r_i}{L} r + \frac{1}{LC} = 0$ et $\Delta = \frac{r_i^2}{L^2} - \frac{4}{LC} = \frac{r_i^2}{L^2} (1 - \frac{4L}{r_i^2 C})$. Δ est négatif si $r_i < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$.

B.5 Avec les grandeurs posées, l'équation différentielle vérifiée par $i(t)$ est la suivante :

$\frac{d^2 i}{dt^2} + 2m\omega_0 \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = 0$. On en déduit que m est sans unité et ω_0 et ω sont des pulsations qui s'exprime en $rad.s^{-1}$.

B.6 En régime pseudopériodique, $i(t)$ est de la forme : $i(t) = e^{-m\omega_0 t} (K_1 \cos \omega t + K_2 \sin \omega t)$, de plus $i(t=0) = 0$ et $L \frac{di}{dt}(t=0) = E$, on déduit alors que $K_1 = 0$ et $K_2 = \frac{E}{L\omega}$ d'où

$$i(t) = \frac{E}{L\omega} e^{-m\omega_0 t} \sin \omega t. \text{ De plus } u_L(t) = L \frac{di}{dt} = E e^{-m\omega_0 t} (\cos \omega t - m \frac{\omega_0}{\omega} \sin \omega t)$$

B.7 Le décrément logarithmique δ traduit la décroissance du signal sur une pseudopériode $\delta = \ln \frac{u_L(t)}{u_L(t+T)} = m\omega_0 T = \frac{2\pi m}{\sqrt{1-m^2}}$. Dans cette application on veut obtenir un circuit oscillant, on veut donc que les oscillations soient amorties le moins possible. On cherche donc à avoir un faible décrément logarithmique.

B.8 Avec $r = 0,5 \Omega$, $C = 200 \text{ pF}$ et $L = 36 \text{ mH}$, on obtient $\omega_0 = 3,7 \cdot 10^5 \text{ rad.s}^{-1}$ et $m = 1,86 \cdot 10^{-5}$, soit $\delta = 1,17 \cdot 10^{-4}$. L'amplitude des oscillations décroît exponentiellement avec le temps. Le temps caractéristique de la décroissance des oscillations est donné par $\tau = \frac{1}{m\omega_0} = 0,15 \text{ s}$. Ce temps est 10000 fois plus grand que la période des oscillations.

B.9 Si $r_i = 0$, $m = 0$, l'équation vérifiée par $u_L(t)$ devient alors $u_L(t) = E(\cos \omega_0 t - \sin \omega_0 t)$ ou encore $u_L(t) = \sqrt{2}E \cos(\omega t + \frac{\pi}{4})$. La période des oscillations est donnée par $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 1,7 \cdot 10^{-5} \text{ s}$.

C Étude du circuit secondaire du flash

C.1 Avant fermeture de l'interrupteur, la tension aux bornes du condensateur est égale à U_0 . L'énergie emmagasinée dans le condensateur est donc $W_C = \frac{1}{2}CU_0^2 = 6,75 \text{ J}$

C.2 On transforme dans un premier temps le générateur de Thévenin, en un générateur de Norton $(\frac{U_0}{r_i}, r_i')$, puis on associe les deux résistances en parallèle : $r_{eq} = \frac{r_i' R_f}{r_i' + R_f}$ et on transforme à nouveau le générateur de Norton en un générateur de Thévenin (E'_{eq}, r'_{eq}) avec $E'_{eq} = \frac{R_f U_0}{r_i' + R_f} = 15,6 \text{ V}$

et $r_{eq} = \frac{r_i' R_f}{r_i' + R_f} = 9,47 \Omega$

C.3 Avec les transformations Thévenin-Norton, le circuit est équivalent à un circuit RC série alimenté par une source de tension E'_{eq} . D'après la loi des mailles, on a $E'_{eq} = r'_{eq} i + u_{C'} = r'_{eq} C \frac{du_{C'}}{dt} + u_{C'}$. On obtient une équation différentielle du premier ordre avec un second membre. La solution est de la forme $u_{C'} = K e^{-\frac{t}{\tau}} + E'_{eq}$ avec $\tau = RC$ et K une constante d'intégration que l'on détermine à partir de la condition initiale $u_{C'} = U_0$, d'où $K = U_0 - E'_{eq}$. On obtient alors : $u_{C'}(t) = (U_0 - E'_{eq}) e^{-\frac{t}{\tau}} + E'_{eq}$.

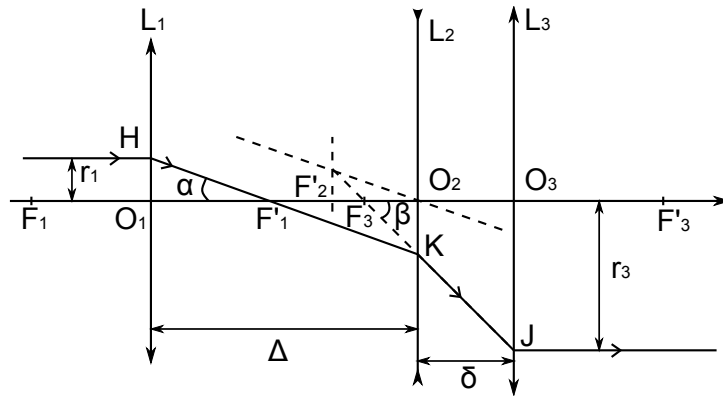
C.4 Le calcul de la constante de temps du circuit donne un ordre de grandeur du temps nécessaire à la décharge du condensateur. $\tau = r'_{eq} C = 1,4 \text{ ms}$. En quelques milisecondes, une grande partie de l'énergie stockée dans le condensateur s'est transformée en énergie lumineuse dans le flash de l'appareil photo.

Exercice 1 Réalisation d'un étendeur de faisceau

1. Ce dispositif est un système afocal. Il donne une image à l'infini d'un objet situé à l'infini.
2. Le rayon incident parallèle à l'axe optique provient d'un objet à l'infini sur l'axe optique. La lentille L_1 en donne une image en son foyer image F'_1 . Le rayon émergent parallèle à l'axe optique correspond à une image finale rejetée à l'infini sur l'axe. L'objet pour L_3 se situe donc en son foyer objet F_3 . Soit : $\infty \xrightarrow{L_1} F'_1 \xrightarrow{L_2} F_3 \xrightarrow{L_3} \infty$. La lentille L_2 conjugue les points F'_1 et F_3 et d'après la formule de conjugaison de Descartes appliquée à la lentille L_2 , on a : $\frac{1}{O_2 F_3} - \frac{1}{O_2 F'_1} = \frac{1}{f'_2}$. Sachant que $O_2 F_3 = \delta - f'_3$ et $O_2 F'_1 = -\Delta + f'_1$, on obtient

la relation $\frac{1}{\delta - f'_3} - \frac{1}{-\Delta + f'_1} = \frac{1}{f'_2}$

3. Le rayon lumineux émerge de la lentille L_1 en passant par F'_1 . On trace la parallèle à ce rayon passant par O_2 , elle coupe le prolongement du rayon émergent de L_2 dans le plan focale image de L_2 .



4. D'après le schéma ci-dessus, on a : $\tan \alpha = \frac{O_1H}{O_1F'_1} = \frac{O_2K}{O_2F'_1}$, d'où $\frac{r_1}{f'_1} = \frac{O_2K}{\Delta - f'_1}$ et $\tan \beta = \frac{O_3J}{O_3F'_3} =$

$$\frac{O_2K}{O_2F'_3} \text{ d'où } \frac{r_2}{f'_3} = \frac{O_2K}{f'_3 - \delta}. \text{ En éliminant } O_2K \text{ on obtient : } \boxed{\frac{r_3}{r_1} = \frac{f'_3}{f'_3 - \delta} \frac{\Delta - f'_1}{f'_1}}.$$

5. On doit résoudre un système de deux équations à deux inconnues. D'après la question 2 on a $\frac{1}{\delta - f'_3} - \frac{1}{-\Delta + f'_1} = \frac{1}{f'_2}$ soit $\frac{1}{f'_3 - \Delta} = \frac{1}{\Delta - f'_1} - \frac{1}{f'_2}$ et on réinjectant cette expression dans l'équation de la question précédente on obtient : $\frac{r_3}{r_1} = \frac{f'_3}{f'_1} \left(1 + \frac{f'_1 - \Delta}{f'_2}\right)$, puis on en déduit

$$\boxed{\Delta = f'_1 + f'_2 \left(1 - \frac{r_3 f'_1}{r_1 f'_3}\right)}. \text{ En réinjectant cette solution dans une des équations on obtient}$$

$$\boxed{\delta = f'_3 + f'_2 \left(1 - \frac{r_1 f'_3}{r_3 f'_1}\right)}$$

6. L'application numérique permet d'obtenir $\Delta = 40 \text{ mm}$, $\delta = 190 \text{ mm}$ d'où $\boxed{d = \Delta + \delta = 23 \text{ cm}}$