

Correction du devoir surveillé n° 3

Problème I Optique géométrique

A Généralités

A.1 $n = \frac{c}{v}$ où c est la vitesse de la lumière dans le vide et v la vitesse de la lumière dans le milieu. Pour le verre ordinaire $n = 1,5$.

A.2 L'approximation de l'optique géométrique est valable lorsque la taille caractéristique des objets considérés est largement supérieur à la longueur d'onde du rayonnement.

A.3 Un système optique qui présente une symétrie de révolution par rapport à un axe est un système optique centré. Cette axe s'appelle l'axe optique.

A.4 Dans les conditions de Gauss, les rayons lumineux sont peu écartés et peu inclinés par rapport à l'axe optique. Lorsque les conditions de Gauss sont vérifiées, on peut considérer un stigmatisme et un aplanétisme approché.

A.5 On cherche l'image A' , on appelle I le point d'intersection entre le rayon provenant de A avec un angle α par rapport à l'axe et le miroir. Le rayon réfléchi issu de I passe par A' et ce rayon fait un angle α' avec l'axe optique. On appelle β , l'angle que fait (CI) avec l'axe optique. D'après la première loi de Descartes on a $i' = (CIA') = -i$ avec $i = (CIA)$. D'après les relations d'angles dans les triangles ACI et CIA' on a $\alpha + \alpha' = 2\beta$. Soit H le projeté de I sur l'axe optique, on a $\tan \beta \approx \beta = \frac{HI}{CH}$, $\tan \alpha \approx \alpha = \frac{HI}{AH}$ et $\tan \alpha' \approx \alpha' = \frac{HI}{A'H}$. De plus, dans les conditions de Gauss, $H \approx S$. On obtient alors d'après les relations sur les angles $\boxed{\frac{1}{SA'} + \frac{1}{SA} = \frac{2}{SC}}$

A.6 On trace le rayon qui passe par B et par F (milieu de SC) qui repart après réflexion parallèle à l'axe optique et le rayon qui arrive parallèle à l'axe optique et qui passe par F . A partir du théorème de Thalès, on obtient $\gamma = \frac{FS}{FA} = \frac{FA'}{FS}$, on obtient donc $\boxed{FA \cdot FA' = f^2}$.

A.7 Ces expressions restent valables pour un miroir sphérique convexe.

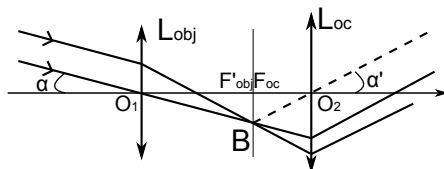
B Lunette astronomique

B.1 Une lentille mince est un ensemble de 2 dioptres sphériques de rayons R_1 et R_2 , de sommets S_1 et S_2 qui sont pratiquement confondus.

B.2 Un système afocal est un système optique qui donne une image à l'infini d'un objet à l'infini.

B.3 Pour que la lunette soit afocale, il faut que le foyer image de la première lentille soit confondu avec le foyer objet de la seconde. La lumière traverse d'abord l'objectif (placé du côté de l'objet) puis l'oculaire (placé du côté de l'œil). Le foyer image de l'objectif est confondu avec le foyer objet de l'oculaire.

B.4



B.5 $\alpha = \frac{F_{oc}B}{f_{obj}}$ et $\alpha' = \frac{F_{oc}B}{f'_{oc}}$ d'où $\boxed{G = \frac{\alpha'}{\alpha} = -\frac{f'_{obj}}{f'_{oc}}}$. L'image est renversée. Elle est réelle à l'infini (en pratique sur la rétine, dans le plan focal image du cristallin au repos).

B.6 S'il y a de la poussière sur l'objectif, cela peut atténuer la luminosité, mais pas altérer l'image.

B.7 La position de l'oeil a peu d'importance a priori, puisque l'observation se fait à l'infini. Toutefois, il est préférable de placer l'oeil dans le plan du cercle oculaire, qui est l'image de la monture de l'objectif à travers l'instrument. Ainsi, toute la lumière traversant l'objectif, passe à travers le cercle oculaire. L'oeil placé dans ce plan reçoit donc un maximum de lumière.

B.8 Les systèmes catadioptriques sont plus utilisés que les lunettes car ils ne présentent pas d'aberration chromatique et sont plus faciles à usiner en grande dimension.

C Télescope spatial de Hubble (H.S.T.)

C.1 D'après la formule de conjugaison, le foyer objet et le foyer image sont confondus et la position du foyer principal est défini par $\overline{S_1 F_1} = \overline{S_1 F'_1} = \frac{\overline{SC}}{2}$. Le foyer image de l'ensemble du télescope est défini l'image d'un point objet à l'infini sur l'axe : $\infty \xrightarrow{M_p} F'_1 \xrightarrow{M_s} F'$. D'après la formule de conjugaison de Descartes, on a $\frac{1}{\overline{S_2 F'}} + \frac{1}{\overline{S_2 F'_1}} = \frac{1}{\overline{S_2 F'_2}}$ soit $\overline{S_2 F'} = \frac{\overline{S_2 F'_2} \cdot \overline{S_2 F'_1}}{\overline{S_2 F'_1} - \overline{S_2 F'_2}} = \frac{-\frac{R_2}{2}(d - \frac{R_1}{2})}{d - \frac{R_1}{2} + \frac{R_2}{2}}$ soit $\overline{S_2 F'} = \frac{-R_2(2d - R_1)}{4d - 2R_1 + 2R_2} = 5,4 \text{ m}$.

C.2 Le rayon réfléchi par M_p coupe l'axe optique en F'_1 , celui réfléchi par M_s coupe l'axe optique en F' . Or $\tan \alpha_1 = -\frac{S_2 J}{S_2 F'}$ et en utilisant le théorème de Thalès : $\frac{S_2 J}{S_1 I} = \frac{F'_1 S_2}{F'_1 S_1}$ d'où :

$$\alpha_1 \approx -\frac{(R_1 - 2d)D_{01}}{2R_1 \overline{S_2 F'}} = -0,024 \text{ rad}$$

C.3 En reprenant le résultat de la question **C.1**, et en remplaçant R_1 par R'_1 on obtient : $\overline{S_2 F'} = \frac{-R_2(2d - R'_1)}{4d - 2R'_1 + 2R_2} = 5,400081 \text{ m}$. On a alors $\delta(\overline{S_2 F'}) = 81 \mu\text{m}$

C.4 On reprend le résultat de la question **C.2** et en remplaçant $\overline{S_2 F'}$ par son expression en fonction de R_1 , on peut écrire : $\alpha_1 = -\frac{D_{01}}{R_1 R_2}(2d - R_1 + R_2)$ d'où $\delta\alpha_1 = \frac{d\alpha_1}{dR_1} \epsilon = \frac{D_{01}(R_2 + 2d)}{R_2 R_1^2} \epsilon = 0,33 \mu\text{rad}$

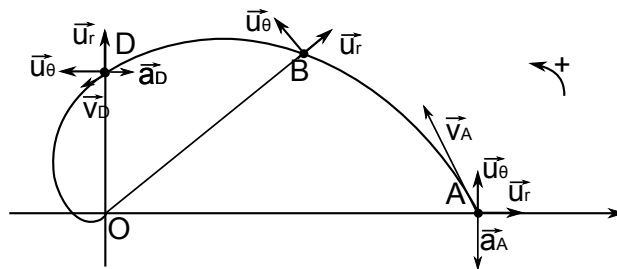
C.5 Si le télescope est utilisé dans les conditions de Gauss, on peut dire que $\sin i^{(l)} \approx i^{(l)}$, $\sin r^{(l)} \approx r^{(l)}$. Les relations deviennent alors $i = nr$ et $i' = nr'$, d'où $D = (n - 1)A$. Pour que le défaut du télescope soit compensé, il faut que le prisme dévie la lumière d'un angle $D = \delta\alpha_1$. On obtient donc :

$$A = \frac{\delta\alpha_1}{n-1} = 0,66 \mu\text{rad}$$

Exercice 1 Déplacement d'un animal

1. La loi horaire : $\theta = \omega t$.

1.a. \vec{u}_r est dirigé suivant \overrightarrow{OM} et \vec{u}_θ est directement orthogonal à \vec{u}_r .



1.b. $\overrightarrow{v(M)} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$ soit $\overrightarrow{v(M)} = a\omega e^{-\omega t}(-\vec{u}_r + \vec{u}_\theta)$. Pour l'accélération $\overrightarrow{a(M)} = \frac{d\overrightarrow{v(M)}}{dt} = -2a\omega^2 e^{-\omega t}\vec{u}_\theta$

1.c. $\|\vec{v}\| = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2}$ soit $\|\vec{v}\| = \sqrt{2}a\omega e^{-\omega t}$. Le mouvement n'est pas uniforme.

1.d. en A, $\theta = \omega t = 0$ soit $\vec{v}_A = -a\omega\vec{u}_r + a\omega\vec{u}_\theta$ et $\vec{a}_A = -2a\omega^2\vec{u}_\theta$
 en D, $\theta = \omega t = \frac{\pi}{2}$ soit $\vec{v}_D = e^{-\frac{\pi}{2}}(-a\omega\vec{u}_r + a\omega\vec{u}_\theta) \approx -0,707a\omega\vec{u}_r + 0,707a\omega\vec{u}_\theta$ et $\vec{a}_D = -2e^{-\frac{\pi}{2}}a\omega^2\vec{u}_\theta \approx -1,414a\omega^2\vec{u}_\theta$

1.e. Le vecteur vitesse est bien tangent à la trajectoire et le vecteur accélération est dirigé suivant la concavité de la courbe. Le produit scalaire $\vec{a} \cdot \vec{v} < 0$ donc le mouvement est retardé et $\|\vec{v}\|$ décroît avec le temps.

2. $\|\vec{v}\| = v_0$ et $\vec{v} = -a\dot{\theta}e^{-\theta}\vec{u}_r + a\dot{\theta}e^{-\theta}\vec{u}_\theta$ soit $\|\vec{v}\| = \sqrt{2a\dot{\theta}e^{-\theta}}$ avec a et $\dot{\theta}$ positifs. On obtient une équation à variable séparables $v_0 = \sqrt{2a}e^{-\theta}\frac{d\theta}{dt}$ qui s'intègre en $\sqrt{2a}[-e^{-\theta}]_0^\theta = v_0t$ conduisant à $\theta(t) = \ln \frac{1}{1 - \frac{\sqrt{2}v_0t}{2a}}$

Exercice 2 La chasse à l'écureuil...

1. On considère le point matériel M de coordonnées (x_p, y_p) dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Le projectile n'est soumis qu'à son poids. Le principe fondamentale de la dynamique s'écrit $M\vec{a} = M\vec{g}$. En projection suivant les axes (Ox) et (Oy) , nous obtenons :

$$\vec{a}_p = \begin{cases} \ddot{x}_p = 0 \\ \ddot{y}_p = -g \end{cases} \quad \vec{v}_p = \begin{cases} \dot{x}_p = v_0 \cos \alpha \\ \dot{y}_p = -gt + v_0 \sin \alpha \end{cases} \quad \vec{OM} = \begin{cases} x_p = v_0 \cos \alpha t \\ y_p = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \alpha t \end{cases}$$

2. On étudie le mouvement de l'écureuil E dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Il n'est soumis qu'à son poids et la projection du principe fondamental de la dynamique sur les axes (Ox) et (Oy) nous permet d'écrire :

$$\vec{a}_E = \begin{cases} \ddot{x}_E = 0 \\ \ddot{y}_E = -g \end{cases} \quad \vec{v}_E = \begin{cases} \dot{x}_E = 0 \\ \dot{y}_E = -gt \end{cases} \quad \vec{OE} = \begin{cases} x_E = L \\ y_E = -\frac{1}{2}gt^2 + H \end{cases}$$

3. Pour que le projectile atteigne l'écureuil à l'instant τ , il faut que $x_p(\tau) = x_E(\tau)$ et $y_p(\tau) = y_E(\tau)$ soit :

$$\begin{cases} L = v_0 \cos \alpha \tau \\ -\frac{1}{2}g\tau^2 + H = -\frac{1}{2}g\tau^2 + v_0 \sin \alpha \tau \end{cases} \quad \text{soit :} \quad \begin{cases} \tau = \frac{L}{v_0 \cos \alpha} \\ \tau = \frac{H}{v_0 \sin \alpha} \end{cases}$$

En regroupant les deux équations, nous obtenons $\frac{L}{v_0 \cos \alpha} = \frac{H}{v_0 \sin \alpha}$ soit $\tan \alpha = \frac{H}{L}$. Or, cette relation est vérifiée par hypothèse et ceci quelquesoit la norme v_0 de la vitesse initiale du projectile. Conclusion : Si l'écureuil se laisse tomber au moment où le projectile part, il est touché par le projectile. Ce n'est donc pas une bonne idée de se laisser tomber !

Exercice 3 Étude du comportement d'un skieur

1. D'après la relation $\|\vec{T}\| = f\|\vec{N}\|$, le coefficient de frottement dû à la neige est sans dimension. Et d'après la relation : $\vec{F} = -k\vec{v}$, le coefficient de frottement k dû à l'air s'exprime en $N; s.m^{-1}$ soit dans les unités S.I. en $kg.s^{-1}$.
2. On considère le point matériel M dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Les forces qui s'exercent sur le point M sont : le poids $\vec{P} = m\vec{g}$; la force de frottement de l'air : $\vec{F} = -k\vec{v}$; la réaction normale $\vec{N} = N\vec{u}_y$ et la composante tangentielle $\vec{T} = T\vec{u}_x$, avec $T < 0$ pour un skieur qui descend la pente. Le principe fondamental de la dynamique appliqué au skieur, conduit à : $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F} + \vec{N} + \vec{T}$. La projection selon l'axe (Oy) s'écrit : $0 = -mg \cos \alpha + N$ soit $N = mg \cos \alpha$. En norme, la composante tangentielle s'obtient à partir de la relation $\|\vec{T}\| = f\|\vec{N}\|$. La composante tangentielle étant opposé au mouvement, nous obtenons une projection selon l'axe (Ox) négative : $\vec{T} = -fmg \cos \alpha \vec{u}_x$
3. La projection du principe fondamental de la dynamique selon l'axe (Ox) s'écrit :

$$m\ddot{x} = m\dot{v} = mg \sin \alpha - kv + T = mg \sin \alpha - kv - fmg \cos \alpha \quad \text{soit :} \quad \frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = g \sin \alpha - fg \cos \alpha$$

où $\tau = \frac{k}{m}$. Cette équation différentielle linéaire admet pour solution la somme d'une solution particulière et de la solution de l'équation sans second membre. La solution particulière correspond à la vitesse limite atteinte au bout d'un temps très long ($\dot{v} = 0$) soit :

$v_l = \frac{mg}{k}(\sin \alpha - f \cos \alpha) = 20,8 m.s^{-1} = 74,8 km.h^{-1}$. La solution de l'équation sans second membre est de la forme : $v = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$. La solution de l'équation est donc $v(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + v_l$. Et connaissant la vitesse initiale $v(t=0) = 0$, on en déduit $v(t) = v_l(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$.

La position x s'obtient par intégration de la vitesse par rapport au temps : $x = v_l(t + \tau e^{-\frac{t}{\tau}}) + B$. La constante d'intégration s'obtient avec la condition initiale $x(t=0) = 0$. Nous obtenons $B = v_l\tau$.

Finalement nous obtenons : $x = v_l(t + \tau(e^{-\frac{t}{\tau}} + 1))$

- On cherche l'instant t_1 tel que : $v(t_1) = \frac{v_l}{2} = v_l(1 - e^{-\frac{t_1}{\tau}})$ soit $t_1 = \tau \ln 2 = 10,4 s$
- On applique à nouveau le principe fondamental de la dynamique en négligeant la force de frottement dû à l'air. La composante tangentielle du à la neige vaut maintenant $\vec{T} = -2fmg \cos \alpha \vec{u}_x$. La projection du principe fondamental de la dynamique selon l'axe Ox s'écrit $m\ddot{x} = m\dot{v} = mg \sin \alpha - 2fmg \cos \alpha$, soit $\dot{v} = g(\sin \alpha - 2f \cos \alpha)$. On prend comme nouvelle origine des temps la date $t' = 0$ qui correspond à la chute du skieur. En intégrant par rapport au temps on obtient $v(t') = g(\sin \alpha - 2f \cos \alpha)t' + \frac{v_l}{2}$. Le skieur s'immobilise à la date t'_a lorsque sa vitesse s'annule : $v(t'_a) = 0$ soit $t'_a = \frac{v_l}{2g(2f \cos \alpha - \sin \alpha)}$. Pour calculer la distance parcouru par le skieur, on choisit une nouvelle origine $x' = 0$ de l'axe (ox) qui correspond à la chute du skieur. x' s'obtient par intégration de la vitesse : $x' = g(\sin \alpha - 2f \cos \alpha)\frac{t'^2}{2} + \frac{v_l t'}{2}$ car $x'(t=0) = 0$. La distance D s'obtient avec la relation : $D = x'(t'_a)$ soit après calcul $D = \frac{v_l^2}{8g(2f \cos \alpha - \sin \alpha)} = 13 m$

Exercice 4 Choc accidentel

- Le principe fondamental de la dynamique appliqué au véhicule durant la phase de freinage dans le référentiel terrestre supposé galiléen s'écrit : $\vec{P} + \vec{R}_T + \vec{R}_N = M\vec{a}$ où \vec{P} est le poids. En projection suivant la direction perpendiculaire au mouvement, on obtient : $R_N = Mg$, d'où $\vec{R}_T = -fMg\vec{u}_x$.
- En projetant le PFD suivant \vec{u}_x , on obtient $-fMg = M\ddot{x}$ soit $\ddot{x} = -fg$. Deux intégrations successives donnent la vitesse et la position du véhicule à la date t : $\dot{x}(t) = -fgt + v_0$ et $x(t) = -\frac{1}{2}fgt^2 + v_0t$. La durée d'arrêt t_a vérifie $\dot{x}(t_a) = 0$, soit $t_a = \frac{v_0}{fg} = 4,1 s$. La distance de freinage D est alors : $D = x(t_a) = -\frac{1}{2}fg(\frac{v_0^2}{fg})^2 + \frac{v_0^2}{fg}$, soit $D = \frac{v_0^2}{2fg} = 49 m$
- Entre les dates $t = 0$ et t_r , le véhicule a un mouvement rectiligne uniforme à la vitesse v_0 . Il parcourt donc la distance $d = v_0t_r$ avant de commencer à freiner. Posons comme origines des dates $t' = 0$ l'instant ou le conducteur commence à freiner. De même que précédemment, l'équation du mouvement est $\ddot{x} = -fg$. Par intégration, on obtient : $\dot{x}(t') = -fgt' + v_0$ et $x(t') = -\frac{1}{2}fgt'^2 + v_0t'$. La date d'impact t'_c vérifie : $x(t'_c) = D - d$ soit $-\frac{1}{2}fgt_c'^2 + v_0t'_c = D - d$ ou encore $\frac{1}{2}fgt_c'^2 - v_0t'_c + (D - d) = 0$. Le discriminant de cette équation du second degré est : $\Delta = v_0^2 - 2fg(D - d) = v_0^2 - 2fg(\frac{v_0^2}{2fg} - d) = 2fgd$ en utilisant l'expression de D précédemment établie. La date t'_c qui convient est la plus petite date positive, soit $t'_c = \frac{v_0 - \sqrt{\Delta}}{fg} = \frac{v_0 - \sqrt{2fgd}}{fg} = \sqrt{2fgd}$. On a alors $v_c = \sqrt{2fgv_0t_r} = 13 m.s^{-1}$
- L'équation du mouvement durant le choc est $\ddot{x} = -a = cste$. Par intégration, on obtient $\dot{x}(t) = -at + v_c$ et $x(t) = -\frac{1}{2}at^2 + v_ct$. En prenant comme origine des abscisses la position au début du choc, la durée de choc τ_c est telle que $\dot{x}(\tau_c) = 0$ soit $\tau_c = \frac{v_c}{a}$. La distance parcourue durant le choc est alors : $E = x(\tau_c) = -\frac{1}{2}a(\frac{v_c}{a})^2 + v_c(\frac{v_c}{a}) = \frac{v_c^2}{2a}$. On en déduit $a = \frac{v_c^2}{2E} = 84,5 m.s^{-2}$, ainsi que $\tau_c = \frac{2E}{v_c} = 0,15 s$