Lycée Brizeux
PCSI A

Samedi 22 novembre 2008

Devoir surveillé n° 3

Optique & Mécanique

- *La durée de l'épreuve est de 4 heures. Les candidats ne sont pas autorisés à sortir avant la fin du temps prévu.*
- *L'usage de la calculatrice est autorisé.*
- *Tous les problèmes et exercices sont indépendants*
- *Les résultats devront être encadrés.*
- *Toute application numérique ne comportant pas d'unité sera considérée comme fausse.*
- *Les résultats littéraux non homogènes entraîneront la perte de tous les points de la question.*

Problème I Optique géométrique

A Généralités

A.1 Rappeler la définition de l'indice absolu d'un milieu transparent. Donner un ordre de grandeur de l'indice optique du verre ordinaire.

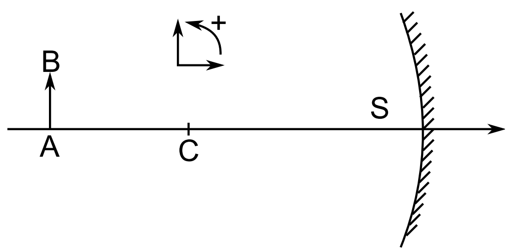
A.2 Dans quelle(s) condition(s) l'approximation de l'optique géométrique est-elle valable ?

A.3 Comment appelle-t-on un système optique qui présente la symétrie de révolution par rapport à un axe ? Comment appelle-t-on cet axe ?

A.4 Expliciter l'approximation de Gauss. Quelles sont les propriétés d'un système optique centré utilisé dans ces conditions ?

Dans la suite du problème, tous les systèmes optiques seront considérés centrés et utilisés dans les conditions de Gauss.

Considérons un miroir sphérique concave de centre C, de sommet S et de rayon R. Un petit objet $\overline{AB}$ est placé perpendiculairement à l'axe optique.



A.5 Définir et exprimer les distances focales objet f et image f' du miroir en fonction de R.

A.6 A partir des lois de Descartes et de considérations géométriques, établir la relation de conjugaison de Descartes avec origine au sommet, pour ce miroir sphérique ainsi que l'expression de son grandissement.

A.7 A partir de considérations géométriques, établir la relation de conjugaison de Newton : $\overline{FA}.\overline{FA'} = f^2$ (avec origine au foyer), pour ce miroir sphérique ainsi que l'expression de son grandissement.

A.8 Ces expressions restent-elles valables pour un miroir sphérique convexe ?

B Lunette astronomique

Toutes les lentilles utilisées seront assimilées à des lentilles minces.

B.1 Quelle est la définition d'une lentille mince ?

Un oeil accommodant à l'infini observe des objets à l'infini à travers une lunette astronomique. Celle-ci est constituée de deux lentilles minces convergentes.

B.2 Quand dit-on qu'un système est afocal ?

B.3 Décrire brièvement le montage correspondant à ce dispositif. L'une des deux lentilles étant appelée objectif, justifier l'origine de ce terme et la position de cette lentille. L'autre est appelée oculaire. Justifier l'origine de ce terme et la position de cette deuxième lentille.

B.4 Tracer la marche d'un rayon lumineux issu d'un point à l'infini sur l'axe optique et celui d'un rayon lumineux issu d'un point situé à l'infini mais faisant avec l'axe optique un angle α.

Le grossissement est défini comme le rapport entre α', angle sous lequel est vu l'objet à travers l'instrument et α, celui sous lequel il est vu sans l'instrument : $G = \frac{\alpha'}{\alpha}$.

B.5 Exprimer ce grossissement en fonction des distances focales image des deux lentilles notées f'_{obj} et f'_{oc}. Quelle est la nature (réelle ou virtuelle) de l'image ? L'image est-elle droite ou renversée ?

B.6 Si de la poussière se dépose sur l'objectif, quelle est la conséquence sur l'image observée à travers la lunette ?

B.7 Où faut-il positionner l'oeil pour se placer dans des conditions optimales d'observation ? Définir cette position en fonction des caractéristiques de l'appareil.

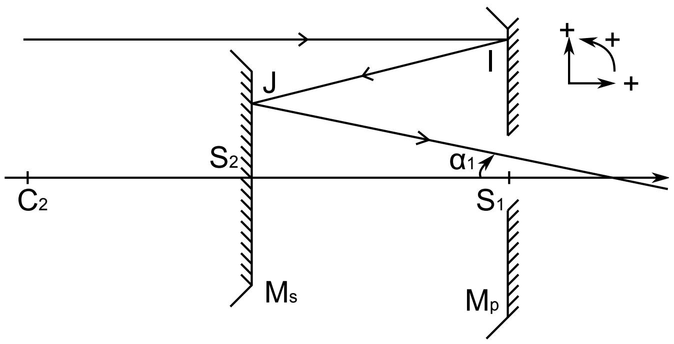
B.8 Les systèmes catadioptriques (c'est-à-dire formés de lentilles et de miroirs) sont aujourd'hui plus utilisés que les lunettes. Citer au moins deux avantages de ces systèmes par rapport aux lunettes astronomiques.

C Télescope spatial de Hubble (H.S.T.)

Ce télescope est certainement le dispositif civil le plus complexe jamais envoyé dans l'espace. Le bloc optique est constitué de deux miroirs : un miroir primaire parabolique concave qui renvoie la lumière incidente sur un miroir secondaire hyperbolique convexe. La configuration de ces deux miroirs est de type Cassegrain.

Afin de mener une étude quantitative, le miroir primaire M_P sera supposé sphérique concave avec un rayon de courbure $R_1 = 11,000\ m$ et un diamètre extérieur $D_{01} = 2,4\ m$. Le miroir secondaire M_S sera supposé sphérique convexe avec un rayon de courbure $R_2 = 1,350\ m$ et un diamètre extérieur $D_{02} = 0,3\ m$. La distance entre les sommets des miroirs vaut $\overline{S_2S_1} = d = 4,900\ m$.

On appelle I l'intersection du rayon incident avec le miroir primaire, et J l'intersection du premier rayon réfléchi avec le miroir secondaire.



C.1 Déterminer les positions des foyers objet et image du miroir primaire, définies par $\overline{S_1F_1}$ et $\overline{S_1F'_1}$. Quelle est la position du foyer image de l'ensemble du télescope, défini par $\overline{S_2F'}$?

Un rayon issu d'un objet situé à l'infini sur l'axe optique et qui vient frapper le miroir le miroir primaire en un point de son bord extérieur, émerge du télescope avec un angle α_1.

C.2 Exprimer cet angle α_1 en fonction des données du problème. Calculer numériquement α_1

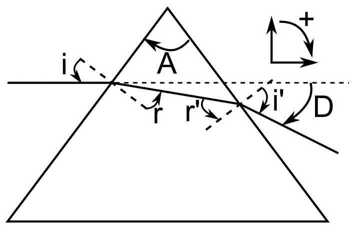
Lors des premières prises de vue, les scientifiques se sont rendus compte que le miroir primaire présentait un défaut de sphéricité près du bord extérieur. Ce défaut sera modélisé par une variation du rayon de courbure du miroir principal, ce qui signifie que dans la zone concernée, le miroir principal est remplacé (la position du sommet S_1 ne change pas) par un autre miroir sphérique de rayon $R_1' = R_1 + \epsilon$ où $\epsilon = 2\ m$.

C.3 Évaluer l'écart $\delta(\overline{S_2F'})$ consécutif à la nouvelle position du foyer du télescope.

C.4 L'écart angulaire $\delta\alpha_1$ lié au défaut peut être évalué à l'aide de la relation : $\delta\alpha_1 = \frac{d\alpha}{dR_1}\epsilon$. Calculer cet écart.

Ce défaut limitant la résolution du télescope, il a été compensé par l'ajout d'une lame d'un verre particulier disposée juste avant le foyer image de l'appareil. Afin d'illustrer cette correction, la lame sera remplacée par un prime de très faible angle au sommet A et d'indice n (figure 3). Les relations qui permettent de calculer la déviation d'un rayon lumineux par un prisme d'angle au sommet quelconque A sont rappelées ci-dessous :

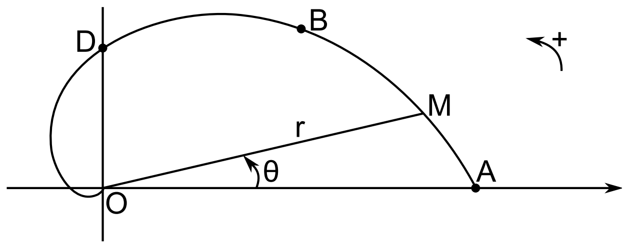
$$\begin{cases} \sin i = n \sin r \\ n \sin r' = \sin i' \\ A = r' - r \\ D = (i' - i - A) \end{cases}$$



C.5 Déterminer l'expression approchée de la déviation D pour un prisme de très petit angle A. En déduire la valeur de A pour compenser le défaut du télescope, l'indice du verre retenu étant $n = 1,5$.

Exercice 1 Déplacement d'un animal

On repère la position d'un animal (point matériel M de masse m) se déplaçant dans un plan par ses coordonnées polaires r et θ de pôle O. L'allure de la trajectoire pour θ variant de 0 à 2π est la suivante :



Il décrit une spirale logarithmique d'équation $r = ae^{-\theta}$ dans le sens des θ croissants, avec a constante positive.

1. Dans un premier temps la loi horaire est $\theta = \omega t$ où la vitesse angulaire ω est une constante positive.
   - 1.a. Reproduire la figure ci-dessus et dessiner aux points A, B et D les vecteurs de la base locale $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$.
   - 1.b. Exprimer dans cette base locale les vecteurs vitesse et accélération du point matériel.
   - 1.c. Calculer la norme du vecteur vitesse. Le mouvement est-il uniforme ?
   - 1.d. Donner les composantes du vecteur vitesse aux points $A(\theta = 0)$ et $D(\theta = \frac{\pi}{2})$ en fonction de a et de ω, et celles du vecteur accélération aux mêmes points en fonction de a et ω^2.
   - 1.e. En précisant l'échelle choisie pour $a\omega$ et $a\omega^2$, dessiner les vecteurs vitesses et accélération aux points A et D. Commenter.
2. Dans un deuxième temps le mouvement est uniforme de vitesse v_0. Trouver la loi horaire vérifiée par θ en prenant $\theta = 0$ pour $t = 0$.

Exercice 2 La chasse à l'écureuil...

Un écureuil se trouve sur une branche à l'altitude H. Un jeune chasseur pointe dans sa direction un lance-pierre. En voyant celui-ci, l'écureuil qui est inventif, se dit : « pour éviter le projectile, je vais me laisser tomber dans le vide et m'accrochée à une branche située plus bas ».

On modélise l'écureuil par un point matériel E de masse m et considère qu'il se laisse tomber au moment où le projectile (point matériel M de masse M) quitte le lance-pierre. On étudie le mouvement de ces deux points matériels dans le plan (O, x, y) où O est confondu avec M pour $t = 0$, et on appelle α l'angle que fait la vitesse initiale du projectile $\overrightarrow{v_0}$ avec l'horizontale Ox. Les coordonnées de l'écureuil E à $t = 0$ sont (L, H). On négligera dans cet exercice les frottements de l'air.

1. Déterminer les équations horaire décrivant le mouvement du projectile.
2. Déterminer les équations horaire décrivant le mouvement de l'écureuil.
3. Déterminer la condition qui doit être vérifiée pour que le projectile atteigne sa cible. Que pensez vous de l'idée de l'écureuil ?

Exercice 3 Étude du comportement d'un skieur

Nous étudions le mouvement d'un skieur M de masse m descendant une piste selon une pente faisant un angle α avec l'horizontale. L'air exerce une force de frottement $\overrightarrow{F} = -k\overrightarrow{v}$, où k est un coefficient constant positif et $\overrightarrow{v}$ la vitesse du skieur. La neige exerce sur le skieur, une force de frottement de composante tangentielle $\overrightarrow{T}$ et de composante normale $\overrightarrow{N}$. Les modules de ces composantes sont reliés par la relation $||\overrightarrow{T}|| = f||\overrightarrow{N}||$ où f est appelé le coefficient de frottement solide. L'origine de l'axe Ox (axe le long de la la pente) est la position initiale du skieur, supposé partir à l'instant initial avec une vitesse négligeable. On note Oy la normale à la piste dirigée vers le haut. On prendra pour les applications numériques : $k = 5\ SI$, $f = 0,8\ SI$, $m = 75\ SI$ et $\cos\alpha = \sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$

1. Déterminer l'unité SI des coefficients k et f.
2. Faites un schéma et calculer les actions $\overrightarrow{T}$ et $\overrightarrow{N}$.
3. Calculer la vitesse v du skieur et montrer qu'il atteint une vitesse limite $v_l = \frac{mg}{k}(\sin\alpha - f\cos\alpha)$ que l'on calculera. Exprimer la vitesse v et la position x du skieur à chaque instant en fonction de la vitesse limite v_l.
4. Calculer la date t_1 pour la quelle le skieur à une vitesse égale à $\frac{v_l}{2}$.
5. A la date t_1, le skieur tombe. On néglige alors la résistance de l'air et on considère que le coefficient de frottement sur le sol est multiplié par 2. Calculer la distance D parcourue par le skieur avant de s'arrêter.

Exercice 4 Choc accidentel

Un véhicule de masse M, roulant à vitesse constante v_0 sur une route rectiligne horizontale, doit faire face brusquement à un obstacle imprévu sur la chaussée pour éviter le choc frontal.

On se propose de calculer la distance de freinage et le temps d'arrêt nécessaire pour stopper le véhicule lancé à la vitesse v_0. On néglige l'effet du frein moteur et on suppose que le freinage contrôlé par ABS s'effectue sans dérapage sous l'effet de la force de frottement constante des roues sur la chaussée $R_T = fR_N$ où f est le coefficient de frottement moyen pneu-chaussée et R_T et R_N sont les normes des composantes tangentielle et normale de la réaction de la route sur les pneus. On repère la position de G du centre d'inertie du véhicule par sa coordonnée horizontale x dans le sens du mouvement avec $x(t=0)=0$ au début du freinage.

1. En appliquant le principe fondamentale de la dynamique, montrer que $\overrightarrow{R_T} = -fMg\overrightarrow{u_x}$ où $\overrightarrow{u_x}$ est le vecteur unitaire orienté dans le sens du mouvement.
2. Déterminer les expressions de la distance de freinage D et du temps d'arrêt t_a, en fonction de v_0, f et g. Faire les applications numériques avec $v_0 = 24\ m.s^{-1}$, $f = 0,6$ et $g = 9,8\ m.s^{-2}$.

Le temps de réflexe d'un conducteur sous le taux maximal légal d'alcoolémie de $0,5\ g.L^{-1}$ est au minimum $t_r = 0,6\ s$. Le conducteur, qui roule à la vitesse v_0, ne commence donc à freiner qu'à la date $t = t_r$, après avoir vu l'obstacle placé à une distance $D = \frac{v_0^2}{2fg}$.

3. Exprimer la vitesse de choc v_c du véhicule contre l'obstacle en fonction de f, g, v_0 et t_r. Calculer numériquement v_c.

On fixe maintenant $t = 0$ et $x = 0$ au début du choc, la vitesse du véhicule étant alors v_c. On cherche à évaluer la durée du choc et l'intensité de la décélération brutale que subit le conducteur et les éventuels passagers. Un enregistrement vidéo montre qu'entre le début et la fin du choc, le centre d'inertie du véhicule G s'est déplacé d'une distance E.

4. En supposant que l'accélération vaut en moyenne $-a$ durant le choc, exprimer la décélération a et la durée du choc τ_c en fonction de E et v_c. Calculer a et τ_c pour $v_c = 13\ m.s^{-1}$ et $E = 1\ m$.