Lycée Brizeux | Samedi 10 janvier 2009
PCSI A

Correction du devoir surveillé n° 4

Problème I Trajectoire d'un satellite

1. $\frac{d\overrightarrow{C}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\wedge\overrightarrow{V}(M/R)+\overrightarrow{OM}\wedge\frac{d\overrightarrow{V}(M/R)}{dt}$ avec $\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \overrightarrow{V}(M/R)$ et $\frac{d\overrightarrow{V}(M/R)}{dt} = \overrightarrow{a}(M/R) = \frac{\overrightarrow{F}}{m}$ où $\overrightarrow{F}$ est la résultante des forces qui s'exerce sur le satellite. Cette résultante des force étant centrale, on a $\overrightarrow{OM} \wedge \frac{d\overrightarrow{V}(M/R)}{dt} = \overrightarrow{0}$. $\overrightarrow{C}$ est donc une constante du mouvement.
2. En coordonnées polaire : $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u_r}$ et $\overrightarrow{V}(M/R) = \dot{r}\overrightarrow{u_r}+r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}$ donc $\overrightarrow{C} = r^2\dot{\theta}\overrightarrow{u_z}$ et $\boxed{C = r^2\dot{\theta}}$
3. on a $\overrightarrow{v} = \dot{r}\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} = \dot{r}\overrightarrow{u_r} + \frac{C}{r}\overrightarrow{u_\theta}$ et $\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \dot{\theta}\frac{dr}{d\theta} = \dot{\theta}\frac{dr}{du}\frac{du}{d\theta}$ avec $u = \frac{1}{r}$ donc $\overrightarrow{v} = -C\frac{du}{dt}\overrightarrow{u_r} + Cu\overrightarrow{u_\theta}$ et $\boxed{v^2 = C^2\left[(\frac{du}{d\theta})^2 + u^2\right]}$.
4. En coordonnées polaire l'accélération s'écrit : $\overrightarrow{a} = (\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\overrightarrow{u_r}+\frac{1}{r}\frac{dr^2\dot{\theta}}{dt}\overrightarrow{u_\theta}$, or $r^2\dot{\theta}$ est constant donc l'accélération est radiale. On a alors $\overrightarrow{a} = (\ddot{r} - c^2u^3)\overrightarrow{u_r}$ et $\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = -C^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2}$ soit $\boxed{\overrightarrow{a} = -C^2u^2(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u)\overrightarrow{u_r}}$ (Deuxième formule de Binet).
5. On applique le principe fondamental de la dynamique au satellite de masse m qui n'est soumis qu'à la force d'attraction gravitationnelle. On a alors : $m\overrightarrow{a} = -G\frac{mM_T}{r^2}\overrightarrow{u_r}$. En projetant suivant $\overrightarrow{u_r}$ et en simplifiant par m, on obtient $a = -GM_Tu^2$ et en utilisant la formule de Binet pour l'accélération on obtient : $\boxed{\frac{d^2u}{dt} + u = \frac{GM_T}{C^2}}$
6. La solution de cette équation différentielle est la somme d'une solution particulière et de la solution générale sans second membre donc $u = \frac{GM_T}{C^2} + A\cos(\theta - \theta_0)$ où A et θ_0 sont des constantes d'intégration et sachant que $u = \frac{1}{r}$, on a $\boxed{r(\theta) = \frac{p}{(1+e\cos(\theta-\theta_0))}}$ avec $e = \frac{Ac^2}{GM_T}$ et $\boxed{p = \frac{C^2}{GM_T}}$
7. Pour que la trajectoire du satellite soit fermée, il faut que $\boxed{e < 1}$.
8. La vitesse aréolaire correspond à la dérivée de l'aire balayée par le rayon vecteur $\overrightarrow{OM}$ par rapport au temps. On a $\boxed{\frac{d\mathcal{A}}{dt} = \frac{C}{2}}$
9. On intègre la vitesse l'expression précédente sur une période et on obtient : $\mathcal{A}_{ellipse} = \frac{C}{2}T = \pi ab$ et en remplaçant par les expressions des demi grand axe et demi petit axe, on obtient $\boxed{T = \frac{2\pi}{C}\frac{p^2}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}}$
10. $E_p = -GM_Tmu = -\frac{GM_Tm}{p}(1 + e\cos(\theta - \theta_0))$.
11. La formule de Binet pour la Vitesse nous donne $v^2 = C^2\left[(\frac{du}{d\theta})^2 + u^2\right]$ et $u(\theta) = \frac{1+e\cos(\theta-\theta_0)}{p}$ soit $\frac{du}{d\theta}^2 = \frac{e^2\sin^2(\theta-\theta_0}{p^2}$, on a alors $v^2 = \frac{C^2}{p^2}(1+e^2\cos^2(\theta-\theta_0)+2e\cos(\theta-\theta_0)+e^2\sin^2(\theta-\theta_0)) = \frac{C^2}{p^2}(1 + e^2 + 2e\cos(\theta - \theta_0))$. L'énergie mécanique est la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle et elle s'écrit sachant que $C^2 = pGM_T$, $E_m = -\frac{GM_Tm}{p}(1 + e\cos(\theta - \theta_0) - \frac{1}{2}(1 + e^2 + 2\cos(\theta - \theta_0)))$ soit $\boxed{E_m = -\frac{GM_Tm}{2p}(1 - e^2)}$
12. Si $v^2 = \frac{2GM_T}{r}$ l'énergie mécanique est égale à : $E_m = \frac{1}{m}v^2 - \frac{GM_Tm}{r} = 0$. D'après la question précédente l'excentricité vaut 1 et la trajectoire est parabolique. Le satellite ne reste donc pas en orbite autour de la Terre : il est dans un état de diffusion.

Problème II Équilibre métastable

A Étude énergétique

A.1

- 1^{er}cas : $-\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$. On introduit la base polaire $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$ pour exprimer la la vitesse du point M : $\overrightarrow{v} = R_1\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}$. On détermine l'expression de l'énergie potentielle par intégration de l'expression suivante : $-dE_p = \overrightarrow{P}.\overrightarrow{dl} = -m\overrightarrow{g}.\overrightarrow{v}dt$ soit $dE_p = -mR_1\dot{\theta}dt\overrightarrow{g}.\overrightarrow{u_\theta} = mgR_1\sin\theta d\theta$. Par intégration il vient $E_p(\theta) = -mgR_1\cos\theta + K$ avec $E_p(\pi) = 0$ soit $\boxed{E_p = -mgR_1(1+\cos\theta)}$
- 2^{e}cas : $\pi < \theta < \frac{5\pi}{2}$. On refait le même raisonnement en remplaçant R_1 par R_2 et on obtient $\boxed{E_p(\theta) = -mgR_2(1+\cos\theta)}$

A.2 Tracer l'allure de la courbe $E_p(\theta)$.

A.3 D'après le graphique précédent on a trois positions d'équilibre : 2 positions d'équilibre stables en $\theta = 0$ et $\theta = 2\pi$ (minimum d'énergie potentielle eu une position d'équilibre instable en $\theta = \pi$ (maximum d'énergie potentielle).

B Réponse à une perturbation

B.1 L'énergie mécanique $E_m = E_c + E_p$ est conservative en l'absence de frottements. L'énergie mécanique au point E $(\theta = 0)$ est égale à $E_{mE} = \frac{1}{2}mv_0^2 - 2mgR_1$, et dans la situation limite la vitesse en B est nulle donc l'énergie mécanique sera égale au point B à $E_{mB} = \frac{1}{2}mv_B^2$. L'anneau atteint donc le point B si $\boxed{v_0 > 2\sqrt{gR_1}}$. Si cette condition n'est pas satisfaite l'anneau peut sortir de la piste au point A ou alors il oscille autour de sa position d'équilibre stable $(\theta = 0)$ que l'on peut qualifier de position d'équilibre métastable, puisqu'une contrainte extérieure permet de de faire cesser cet équilibre.

B.2 L'énergie mécanique est conservative don $E_{mB} = E_{mD}$ soit $\frac{1}{2}mv_B^2 = \frac{1}{2}mv_D^2 - 2mgR_2$ car $\theta_D = 2\pi$ soit $v_D^2 = v_B^2 + 4gR_2$ et $v_B^2 = v_0^2 - 4gR_1$ soit $\boxed{v_D^2 = v_0^2 + 4g(R_2 - R_1)}$

B.3 L'anneau sort de la piste en S si la vitesse de l'anneau au point S est non nulle. A partir de la conservation de l'énergie mécanique, on obtient $\frac{1}{2}mv_D^2 - 2mgR_2 = \frac{1}{2}mv_s^2 - mgR_2$ soit $v_s^2 = v_D^2 - gR_2$. L'anneau sort du support si $\boxed{v_D^2 > 2gR_2}$. On a trouvé dans les questions précédentes que $v_D = \sqrt{v_0^2 + 4g(R_2 - R_1)}$ et que $v_0^2 > 4gR_1$, la condition précédente est bien vérifiée et l'anneau sortira de la piste.

C Petites oscillations autour de la position d'équilibre

C.1 Le moment cinétique est défini par $\overrightarrow{L_O} = \overrightarrow{OM} \wedge m\overrightarrow{v}$, la dérivé du moment cinétique est donc égale à $\frac{d\overrightarrow{L_O}}{dt} = \overrightarrow{OM} \wedge m\overrightarrow{a}$ et d'après le principe fondamental de la dynamique, on a $\frac{d\overrightarrow{L_O}}{dt} = \mathcal{M}_{\overrightarrow{F}}$ où $\mathcal{M}_{\overrightarrow{F}}$ est le moment de la résultante des forces par rapport à O.

C.2 On applique le théorème du moment cinétique dans le référentiel d'étude supposé galiléen à l'anneau de masse m. Il est soumis au poids et à la réaction du support puisque l'on néglige les frottements. La dérivée du moment cinétique par rapport au point C_1 est égale au moment du poids car $\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{R} = 0$. La dérivée du moment cinétique au point C_1 est égale à $mR_1^2\ddot{\theta}$, et le moment du poids vaut $-mgR_1\sin\theta$ En en déduit l'équation du mouvement pour les petits angles $(\sin\theta \approx \theta)$: $\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{R_1}\theta = 0}$.

C.3 L'énergie mécanique étant constante sa dérivée par rapport au temps est nulle. On a $E_m = \frac{1}{2}mR_1^2\dot{\theta}^2 - mgR_1(1+\cos\theta)$ soit $\frac{dE_m}{dt} = mR_1^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + \dot{\theta}mR_1\sin\theta = 0$ d'où $mR_1^2\dot{\theta}(\ddot{\theta} + \frac{g}{R_1}\sin\theta) = 0$. On obtient alors l'équation du mouvement en considérant les petits angles $(\sin\theta \approx \theta)$: $\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{R_1}\theta = 0}$

C.4 On définit la pulsation propre de l'oscillateur harmonique : $\omega_0^2 = \frac{g}{R_1}$ et la période est égale à $\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{R_1}{g}}}$

C.5 La solution de l'équation différentielle est de la forme $\theta(t) = K_1 \cos\omega_0 t + K_2 \sin\omega_0 t$ où K_1 et K_2 sont des constantes d'intégrations. Sachant que $\theta(0) = 0$ et $v(t = 0) = v_0$, on obtient $K_1 = 0$ et $K_2 = \frac{v_0}{R_1\omega_0}$ soit $\boxed{\theta(t) = \frac{v_0}{R_1\omega_0}\sin\omega_0 t}$.

Problème III Oscillations mécaniques

A Oscillateur harmonique non amorti

A.1 On considère le point matériel M dans le référentiel d'étude supposé galiléen. Il subit l'action du poids et de la tension du fil puisque l'on néglige la poussée d'Archimède dans l'air et la force de frottement de l'air. En appliquant le principe fondamental de la dynamique (PFD) projeté sur l'axe (Ox), on obtient : $m\ddot{x} = mg - k(x - x_0)$ d'ou l'équation (1) : $\boxed{\ddot{x} + \frac{k}{m}x = g + \frac{k}{m}x_0}$. Lorsque la masse est à l'équilibre, $\ddot{x}$ est nul et $x = x_{eq}$. On obtient alors l'équation (2) $\frac{k}{m}x_{eq} = g + \frac{k}{m}x_0$ d'où $\boxed{x_{eq} = x_0 + \frac{mg}{k}}$

A.2 D'après l'équation (2), on obtient $g + \frac{k}{m}x_0 = \frac{k}{m}x_{eq}$, et en réinjectant cette équation dans l'équation (1), on obtient : $\boxed{\ddot{x} + \frac{k}{m}(x - x_{eq}) = 0}$. On reconnaît l'équation d'un oscillateur harmonique et on pose $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ et $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ soit $\boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$.

A.3 On pose $x' = x - x_{eq}$, l'équation devient : $\ddot{x}' + \omega_0^2 s' = 0$. La solution de cette équation est de la forme : $x' = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$, soit $x = x_{eq} + A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$. À $t = 0$, $x = x_{eq}$ soit $A = 0$, et $\dot{x} = v_0$, soit $B = \frac{v_0}{\omega_0}$. La solution est donc de la forme : $\boxed{x(t) = x_{eq} + \frac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t}$

B Oscillateur harmonique amorti par frottement fluide

B.1 On a trouvé dans la partie précédente $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, en remplaçant m par ρV, on a $\boxed{\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{\rho V}}}$

B.2 À l'équilibre on doit rajouter la poussée d'Archimède dans l'eau par rapport à la partie précédente. On a alors : $k(x'_{eq} - x_0) = \rho V g - \rho_l V g$. On en déduit : $\boxed{\rho_l = \rho - \frac{k}{Vg}(x'_{eq} - x_0)}$

B.3 On applique le PFD projeté suivant (Ox) : $\rho V\ddot{x} + 6\pi\eta R\dot{x} + kx = kx_0 + Vg(\rho - \rho_l)$. En utilisant la question précédente on obtient : $\boxed{\ddot{x} + \frac{6\pi\eta R}{\rho V}\dot{x} + \frac{k}{\rho V}(x - x'_{eq}) = 0}$

B.4 Le régime sera pseudopériodique si le discriminant du polynôme caractéristique est négatif. Le polynôme caractéristique s'écrit $r^2 + \frac{6\pi\eta R}{\rho V}r + \frac{k}{\rho V} = 0$ donc $\Delta = (\frac{6\pi\eta R}{\rho V})^2 - \frac{4k}{\rho V} = \frac{4}{\rho V}[\frac{9\pi^2\eta^2R^2}{\rho V} - k]$. On pose $\boxed{k_0 = \frac{9\pi^2\eta^2R^2}{\rho V}}$. Le discriminant sera donc négatif si $k > k_0$. La pseudopulsation correspond à $\omega_2 = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}$, soit $\boxed{\omega_2 = \omega_1\sqrt{1 - \frac{k_0}{k}}}$

B.5 D'après la relation précédente, on a $(\frac{\omega_2}{\omega_1})^2 = 1 - \frac{k_0}{k}$ d'où $k_0 = k[1 - (\frac{\omega_2}{\omega_1})^2]$, soit en remplaçant par l'expression de k_0 on obtient $\eta^2 = \frac{k\rho V}{9\pi^2R^2}[1 - (\frac{\omega_2}{\omega_1})^2]$ soit $\boxed{\eta = \frac{1}{3\pi R}\sqrt{k\rho V[1 - (\frac{\omega_2}{\omega_1})^2]}}$

C Oscillations forcées : puissance absorbée par l'oscillateur

C.1 On associe à la grandeur réelle : $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$, la notation complexe $\underline{x} = \underline{X}e^{j\omega t}$ avec $\underline{X} = Ae^{j\varphi}$. On passe alors l'équation différentielle en complexe et on obtient : $\underline{X} =$

$\frac{\frac{F_0}{m}}{\omega_0^2-\omega^2+2j\alpha\omega}$. On obtient alors l'amplitude A en prenant le module de l'amplitude complexe : $\boxed{A = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{4\alpha^2\omega^2+(\omega_0^2-\omega^2)^2}}}$

C.2 D'après l'expression de l'amplitude complexe on a $\varphi = \arg \underline{X} = \arg(\omega_0^2 - \omega^2 - j2\alpha\omega)$, on en déduit que l'angle $\varphi \in [-\pi; 0]$ et $\boxed{\sin\varphi = -\frac{2\alpha\omega}{\sqrt{4\alpha^2\omega^2+(\omega_0^2-\omega^2)^2}}}$ et $\boxed{\cos\varphi = \frac{\omega_0^2-\omega^2}{\sqrt{4\alpha^2\omega^2+(\omega_0^2-\omega^2)^2}}}$

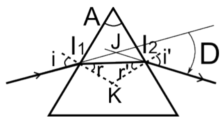
C.3 $\boxed{v(t) = \frac{dx}{dt} = -A\omega\sin(\omega t+\varphi)}$ et $\boxed{P_e(t) = \overrightarrow{F}.\overrightarrow{v} = -F_0A\omega\cos\omega t\sin(\omega t+\varphi)}$. Pour déterminer la valeur moyenne de $< P_e >$, on linéarise $\sin(\omega t+\varphi) = \sin\omega t\cos\varphi + \cos\omega t\sin\varphi$. On en déduit $< P_e >$ en sachant que $< \cos^2\omega t >= \frac{1}{2}$, $< \cos\omega t\sin\omega t >=< \cos\omega t >=< \sin\omega t >= 0$.

On a alors : $< P_e >= -\frac{1}{2}F_0A\sin\varphi$ soit $\boxed{< P_e >= \frac{\alpha\frac{F_0^2}{m}}{4\alpha^2+(\frac{\omega_0^2}{\omega}-\omega)^2}}$

C.4 $< P_e >$passe par un maximum lorsque son dénominateur est minimum. Soit lorsque $\boxed{\omega = \omega_0}$. On a alors $\boxed{< P_e >_{max}= \frac{F_0^2}{4\alpha m}}$

C.5 Le phénomène physique mis en évidence est une résonance en puissance. Quand $\omega \to 0$, $< P_e >\to 0$ et lorsque $\omega \to \infty$, $< P_e >\to 0$. On en déduit alors le graphe de $< P_e >$.

Exercice 1 Déviation par un prisme



1. On considère la figure ci-contre. L'application des lois de Descartes donne les deux premières formules du prisme : $\boxed{\sin i = n\sin r}$ (1) et $\boxed{\sin i' = n\sin r'}$ (2). Les relations entre les angles dans le triangle I_1AI_2 permet d'écrire $\boxed{r + r' = A}$ (3). Enfin, on utilisant les relations entre les angles dans le triangle JI_1I_2 on a $\boxed{D = i + i' - A}$ (4)
2. Lors de la sortie du prisme, le rayon réfracté s'écarte de la normale : la limite correspond à l'émergence rasante $i' = \frac{\pi}{2}$ et pour que $i' \leq \frac{\pi}{2}$ il faut que $r' \leq \theta$ tel que $\boxed{\theta = \arcsin\frac{1}{n}}$. Par conséquent $r \geq A - \theta$ et $\sin i \geq n\sin(A-\theta)$. L'angle d'incidence minimale est de : $\boxed{i_0 = \arcsin[n\sin(A-\theta)]}$
   D'après le principe du retour inverse de la lumière, pour une incidence rasante ($i = \frac{\pi}{2}$), on obtiendrait $r = \theta$, puis $r' = A - \theta$ et $i' = i_0$. Dans les deux sens de parcours on a $r' \leq \theta$ et $r \leq \theta$, et comme $A = r + r'$, on trouve une condition sur A : $\boxed{A \leq 2\theta}$
3. Dans le cas des petits angles les 4 relations deviennent : $i \approx nr$, $i' \approx nr'$, $A = r + r'$ et $D \approx i + i' - A$ soit $\boxed{D = (n-1)A}$. On constate que la déviation est une fonction croissante de l'indice n et de l'angle au sommet A.
4. On montre que D passe par un extremum à laide du principe du retour inverse de la lumière (cf cours). On a cet extremum pour $i_m = i'_m$ soit $r_m = r'_m = \frac{A}{2}$. dans ce cas : $\sin i_m = n\sin\frac{A}{2}$ et $D_m = 2i_m - A$ soit $\boxed{n = \frac{\sin\frac{D_m+A}{2}}{\sin\frac{A}{2}}}$
5. On utilise un goniomètre et on relève expérimentalement les valeurs des minimum de déviation de chaque raie d'une source étalon(mercure ou cadmium par exemple). On calcule alors pour chaque raie l'indice de réfraction $n(\lambda)$ à l'aide de la relation établie à la question précédente. On trace alors $n(\lambda)$ en fonction de $\frac{1}{\lambda^2}$. Si les mesures ont été faites correctement, on obtient une droite d'ordonnée à l'origine α et de coefficient directeur β.