Lycée Brizeux
PCSI A

Samedi 10 janvier 2009

Devoir surveillé n° 4

Mécanique

- *La durée de l'épreuve est de 4 heures. Les candidats ne sont pas autorisés à sortir avant la fin du temps prévu.*
- ***L'utilisation de la calculatrice est interdite.***
- *Tous les problèmes et exercices sont indépendants*
- *Les résultats devront être encadrés.*
- *Toute application numérique ne comportant pas d'unité sera considérée comme fausse.*
- *Les résultats littéraux non homogènes entraîneront la perte de tous les points de la question.*

Problème I Trajectoire d'un satellite

Soit un satellite artificiel considéré comme un point matériel M de masse m et soumis à la force centrale de gravitation exercée par la Terre (supposée sphérique de centre O, de rayon R_T et de masse M_T). Le référentiel d'étude géocentrique R(oxyz) est supposé galiléen. Le satellite décrit une trajectoire dans le plan (Oxy) et on le repère dans le système de coordonnées polaires : $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u_r}$.

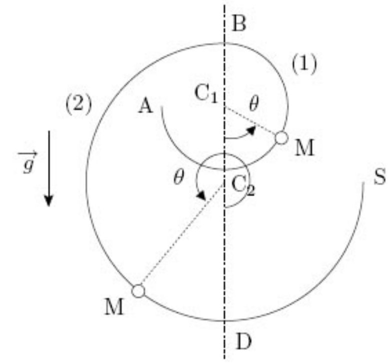
1. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{C} = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{V}(M/R)$ où $\overrightarrow{V}(M/R)$ est la vitesse dans R, est un vecteur constant dans R.
2. Calculer la projection C de $\overrightarrow{C}$ suivant $\overrightarrow{u_z}$ en fonction de $\dot{\theta}$ et de r.
3. Montrer que la norme au carré de la vitesse du satellite peut se mettre sous la forme : $v^2 = C^2\left[(\frac{du}{d\theta})^2 + u^2\right]$ où $u = \frac{1}{r}$ (Première formule de Binet).
4. Montrer que le vecteur accélération s'écrit : $\overrightarrow{a} = -C^2u^2(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u)\overrightarrow{u_r}$ (Deuxième formule de Binet).
5. En déduire l'équation différentielle permettant de trouver $u(\theta)$.
6. Montrer que $r(\theta) = \frac{p}{(1+e\cos(\theta-\theta_0))}$ où p, e et θ_0 sont constants et exprimer p en fonction de C, G et M_T.
7. Quelle est la condition sur e (excentricité de la trajectoire) pour que la trajectoire du satellite soit fermée ?
8. Quelle relation existe-t-il entre la vitesse aréolaire et C ?
9. On considère que la trajectoire du satellite est elliptique d'excentricité e avec $\theta_0 = 0$. On rappelle que l'aire d'une ellipse est égale à πab où a est le demi grand axe ($a = \frac{p}{1-e^2}$) et b le demi petit axe ($b = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}}$). Exprimer la période T de rotation en fonction de C, p et e.
10. Déterminer l'expression de l'énergie potentielle en fonction de G, M_T, m et r puis en fonction de p, e, G, M_T et m.
11. En exploitant la formule de Binet pour la vitesse, déterminer l'expression de l'énergie mécanique en fonction uniquement de G, M_T, m, p et e.
12. Que vaut e dans le cas où la norme de la vitesse du satellite est donnée par la relation suivante : $V = \sqrt{\frac{2GM_T}{r}}$? En déduire la nature de la trajectoire. Conclusion.

Problème II Équilibre métastable

On dit qu'un système est en équilibre métastable lorsqu'étant dans un état d'équilibre stable, il est susceptible d'évoluer vers un autre état d'équilibre plus stable sous l'effet d'une petite perturbation.

On considère un anneau de masse m, assimilable à un point matériel M, qui se déplace sur une piste fixe formée de deux parties circulaires :
- la partie (1) allant de A à B, de rayon R_1 et de centre C_1,
- la partie (2) allant de B à S, de rayon $R_2 > R_1$ et de centre C_2.

Les centres C_1 et C_2 sont situés sur la même verticale. L'ensemble de la piste est placé dans un plan vertical.



Sur la partie (1), on repère le mouvement du point matériel par l'angle θ que fait le vecteur $\overrightarrow{C_1M}$ avec la verticale descendante. Sur la partie (1) θ varie entre $-\frac{\pi}{2}$ (position en A) et π (position en B). Sur la partie (2) θ varie entre π et $5\frac{\pi}{2}$ (position en S).

Le glissement de l'anneau a lieu sans frottement. Le référentiel d'étude est supposé galiléen et le champ de pesanteur a pour intensité g.

A Étude énergétique

A.1 Exprimer l'énergie potentielle de pesanteur E_p de l'anneau M en fonction des constantes m, g, R_1, R_2 et de la variable θ en prenant $E_p = 0$ au point B et en distinguant les cas $-\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ (anneau sur la partie (1)) et $\pi < \theta < 5\frac{\pi}{2}$ (anneau sur la partie (2)).

A.2 Tracer l'allure de la courbe $E_p(\theta)$.

A.3 Quelles sont les positions d'équilibres de l'anneau ? Préciser leur stabilité.

B Réponse à une perturbation

L'anneau M étant initialement sur la partie (1) au point E défini par $\theta = 0$, il subit une petite perturbation dont on admet qu'elle équivaut à le lancer sur la piste avec une vitesse $\overrightarrow{v_0}$ horizontale.

B.1 À quelle condition sur v_0, g et R_1, l'anneau peut-il atteindre le point B ? Que se passe-t-il si cette condition n'est pas satisfaite ?

B.2 Cette condition étant remplie, exprimer la vitesse v_D de passage en D en fonction des données.

B.3 Quelle doit être la vitesse minimale au point D pour que l'anneau sorte de la piste en S ? Conclure.

C Petites oscillations autour de la position d'équilibre

On considère dans cette partie que la vitesse v_0 est insuffisante pour que l'anneau puisse atteindre la partie (2). Le point matériel oscille donc autour de sa position d'équilibre stable. On supposera l'amplitude des oscillations faibles pour que l'on puisse considérer que $\sin\theta \approx \theta$.

C.1 Énoncer et démontrer le théorème du moment cinétique.

C.2 Déterminer l'équation différentielle du mouvement à partir du théorème du moment cinétique.

C.3 Retrouver cette équation différentielle à partir d'une autre méthode de votre choix.

C.4 Exprimer la période des oscillations en fonction de g et R_1.

C.5 Sachant que $\theta(0) = 0$ et $v(t = 0) = v_0$, déterminer l'expression de $\theta(t)$.

Problème III Oscillations mécaniques

Nous nous proposons, dans ce problème, d'étudier quelques exemples d'oscillateurs mécaniques. Pour chacune des parties, l'étude sera menée dans le référentiel du laboratoire considéré comme galiléen. Dans l'ensemble du problème, $\overrightarrow{g}$ désigne le vecteur accélération de la pesanteur. On notera g la norme du vecteur $\overrightarrow{g}$.

Il est rappelé que lorsqu'un corps est immergé, partiellement ou totalement, dans un fluide de masse volumique ρ_l ce corps est soumis, en plus de son poids, à une force $\overrightarrow{F}_a$ appelée poussée d'Archimède et telle que $\overrightarrow{F}_a = -\rho_l V_i \overrightarrow{g}$ où V_i désigne le volume du corps immergé dans le fluide.

On négligera la poussée d'Archimède dans l'air

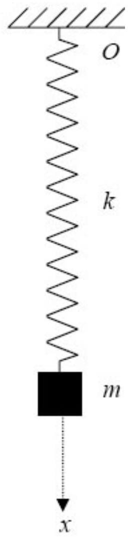
Données trigonométriques :

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \qquad \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a \qquad \sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$$

A Oscillateur harmonique non amorti

Considérons le système représenté ci-dessous : une masse m est suspendue à un ressort vertical de masse négligeable et de raideur k. L'extrémité supérieure du ressort est fixe et attachée au point O. Soit l'axe (Ox), vertical et orienté vers le bas. La position de l'extrémité libre du ressort est repérée par son abscisse x. Soit x_0 la longueur à vide du ressort et x_{eq} sa longueur lorsque la masse m est accrochée au ressort et est à l'équilibre.



Équation différentielle du mouvement

A.1 Faire le bilan des forces appliquées à la masse m. Appliquer la deuxième loi de Newton et déterminer l'équation différentielle (1) vérifiée par x. Que devient cette équation lorsque la masse m est à l'équilibre ? On appellera (2) l'équation obtenue dans ce cas.

Déduire de l'équation (2) l'expression de la longueur x_{eq} du ressort à l'équilibre en fonction de x_0, g, m et k.

A.2 Déterminer en combinant les équations (1) et (2), l'équation différentielle (3) vérifiée par x et liant x, x_{eq}, m et k. En déduire la pulsation propre ω_0 et la période propre T_0 de l'oscillateur ainsi obtenu.

A.3 A l'instant $t = 0$, la masse m est dans une position telle que la longueur du ressort est égale à x_{eq}. On communique alors à la masse m une vitesse v_0 verticale. Déterminer dans ce cas la solution $x(t)$ de l'équation différentielle (3).

B Oscillateur harmonique amorti par frottement fluide

La masse m du système de la partie précédente est une sphère homogène de masse volumique ρ et de rayon R faible. Lorsque cette sphère est animée d'une vitesse $\overrightarrow{v}$ et plongée dans un liquide de coefficient de viscosité η, elle est soumise, de la part du fluide, en plus de la poussée d'Archimède, à une force de frottement $\overrightarrow{f}$ donnée par la loi de Stokes : $\overrightarrow{f} = -6\pi\eta R\overrightarrow{v}$. On négligera les interactions éventuelles entre le ressort et le liquide.

Pour simplifier les calculs, on notera V le volume de la sphère et ρV sa masse.

Période de l'oscillateur non amorti (évolution de la sphère dans l'air)

B.1 En l'absence de frottement et de poussée d'Archimède (**dans l'air**), les oscillations libres de la sphère ont une pulsation propre ω_1. En utilisant les résultats de la partie précédente déterminer l'expression de ω_1 en fonction de k, V et ρ.

Dans la suite de cette deuxième partie, la sphère est totalement immergée dans un liquide de masse volumique ρ_l. On considérera, de plus, que la sphère est entièrement immergée dans le liquide quelle que soit la position de l'oscillateur.

Détermination de la masse volumique du liquide

B.2 Lorsque la sphère est totalement immergée dans le liquide et est à l'équilibre, la longueur du ressort est égale à x'_{eq}. Faire le bilan des forces appliquées à la masse m. Déterminer l'expression de la masse volumique ρ_l du liquide en fonction de ρ, x'_{eq}, V, g, x_0 et k.

Oscillations pseudopériodiques de la sphère immergée dans le liquide

B.3 En appliquant la deuxième loi de Newton, déterminer l'équation différentielle vérifiée par la longueur x du ressort à un instant quelconque t au cours du mouvement. En utilisant l'expression de la masse volumique ρ_l du liquide déterminée à la question précédente, déterminer l'équation différentielle vérifiée par x en utilisant les grandeurs x, x'_{eq} , ρ, V, k, R et η.

B.4 À quelle condition portant sur k, constante de raideur du ressort, le mouvement de la sphère est-il pseudopériodique ? On exprimera la condition sous la forme $k > k_0$ où k_0 est une constante que l'on exprimera en fonction de η, R, V et ρ. Déterminer dans ce cas la pseudopulsation ω_2 des oscillations en fonction de k_0, k, ρ et V.

Détermination du coefficient de viscosité du liquide

B.5 On considère dans cette question que la condition sur k pour avoir des oscillations pseudopériodiques est satisfaite. En utilisant les expressions de ω_1 et ω_2 déterminées précédemment, donner l'expression du coefficient de viscosité η du liquide en fonction de R, ρ, V, ω_1 et ω_2.

C Oscillations forcées : puissance absorbée par l'oscillateur

Soit un oscillateur amorti par frottement fluide constitué par une masse m suspendue à un ressort de masse négligeable. La position de la masse m étant repérée par son abscisse x, en régime libre l'équation différentielle vérifiée par x est de la forme :

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

où ω_0 désigne la pulsation propre de l'oscillateur harmonique.

L'oscillateur est soumis à une excitation extérieure sinusoïdale de pulsation ω donnée par : $\overrightarrow{F}(t) = F_0 \cos\omega t\overrightarrow{u_x}$ avec $F_0 > 0$ et $\overrightarrow{u_x}$ le vecteur unitaire de l'axe des abcisses x. Dans ce cas lŠéquation différentielle du mouvement s'écrit : $\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0\cos\omega t}{m}$. En régime permanent les oscillations forcées sont telles que $x = A\cos(\omega t + \varphi)$ avec A et φ deux constantes.

Remarque : On pourra dans cette partie utiliser les notations complexes, si nécessaire. Il faudra pour cela définir clairement les notations utilisées.

Régime permanent

C.1 Déterminer l'amplitude A des oscillations forcées en fonction de F_0, m, α, ω et ω_0.

C.2 φ représentant le déphasage entre la source d'excitation extérieure et la réponse de l'oscillateur, déterminer les expression de $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$ en fonction de α, ω et ω_0.

Puissance absorbée par l'oscillateur

C.3 Après avoir préalablement déterminé l'expression de la vitesse v de l'oscillateur au cours du temps, déterminer la puissance instantanée $P_e(t)$ fournie par la force excitatrice. En déduire la valeur moyenne $< P_e >$ de $P_e(t)$. Déterminer l'expression de $< P_e >$ en fonction de F_0, m, ω, ω_0 et α.

C.4 L'expression de $< P_e >$ déterminée à la question précédente peut être mise sous la forme :

$$< P_e >= \frac{\alpha \frac{F_0^2}{m}}{4\alpha^2 + (\frac{\omega_0^2}{\omega} - \omega)^2}$$

En déduire, sans calculer la dérivée de $< P_e >$ mais en examinant le dénominateur, la pulsation pour laquelle $< P_e >$ est maximale ainsi que l'expression $< P_e >_{max}$ correspondante en fonction de F_0, m et α.

C.5 Donner l'allure de la représentation graphique de $< P_e >$ en fonction de ω et donner le nom du phénomène physique mis en évidence.

Exercice 1 Déviation par un prisme

Soit un prisme en verre, d'indice $n(\lambda)$, d'angle au sommet A. Un radiation monochromatique arrive sous une incidence i sur la face d'entrée du prisme.

1. Faites une figure puis établir les quatre relations du prisme liant les angles d'incidence et de réfraction i, r, r' et i', l'angle au sommet A, l'indice du prisme n et la déviation D.
2. À quelle(s) condition(s) sur A et i, le rayon émerge-t-il de la face de sortie du prisme ?
3. La déviation D est une fonction de i, n et A. Trouver le sens de variation de D avec n et avec A dans le cas des petits angles (i, r, r', i' et A restent faibles).
4. On travaille à $n(\lambda)$ fixé et A fixé, pour une incidence quelconque. Montrer que lorsque i varie, la déviation D passe par un minimum D_m. Donner l'expression de n en fonction de D_m et de A.
5. L'indice du prisme varie selon la loi de Cauchy $n = \alpha + \frac{\beta}{\lambda^2}$ et on suppose l'angle du prisme A connu. Décrire une méthode permettant de déterminer expérimentalement les coefficient de Cauchy α et β.