Lycée Brizeux — Samedi 21 mars 2009

PCSI A

Correction du devoir surveillé n° 6

Problème I Amplification et filtrage

A Amplification

A.1 L'amplificateur fonctionne en régime linéaire donc $V^+ = V^- = v_e$. Et d'après un pont diviseur de tension $V^- = \frac{R_2 v_1}{R_1+R_2}$, soit $\boxed{\frac{v_1}{v_e} = A = 1 + \frac{R_1}{R_2} = 21}$

A.2 Ce montage assure la fonction d'amplificateur de tension non inverseur.

B Filtrage

B.1 On constate une rétroaction sur l'entrée inverseuse, l'amplificateur fonctionne alors en régime linéaire soit $V^+ = V^- = v_s$. On applique le théorème de Millman au noeud entre les résistances que l'on nomme A, $V_A = \frac{\frac{v_1}{R}+v_s(\frac{1}{R}+jC_1\omega)}{\frac{2}{R}+jC_1\omega} = \frac{e+v_s(1+jRC_1\omega)}{2+jRC_1\omega}$ puis la formule du diviseur de tension en V^+ soit $V^+ = v_s = V_A\frac{\frac{1}{jC_2\omega}}{R+\frac{1}{jC_2\omega}} = V_A\frac{1}{1+jRC_2\omega}$. En combinant ces deux équations, on obtient $\frac{\underline{v_s}}{\underline{v_1}} = \frac{1}{1+2jRC_2\omega-R^2C_1C_2\omega^2}$. On peut alors mettre cette fonction de transfert sous la forme : $\frac{\underline{v_s}}{\underline{v_1}} = \frac{1}{1+2jm\frac{\omega}{\omega_0}-(\frac{\omega}{\omega_0})^2}$ avec $\boxed{\omega_0 = \frac{1}{R\sqrt{C_1C_2}}}$, et $\boxed{m = \sqrt{\frac{C_2}{C_1}}}$.

B.2 On obtient $\boxed{m = 0,68}$, $\boxed{\omega_0 = 31.10^3\ rad.s^{-1}}$ et $\boxed{f_0 = 4,95\ kHz}$

B.3 On a une résonance lorsque le gain de la fonction de transfert passe par un maximum, c'est à dire lorsque la fonction $g(x) = (1-x^2)^2 + 4m^2x^2$ a un minimum avec $x = \frac{\omega}{\omega_0}$. $g'(x) = -4x(1-x^2-2m^2) = 0$ soit $x^2 = 1-2m^2$. Sachant que $x > 0$, le gain passe par un maximum si $\boxed{m < \frac{1}{\sqrt{2}}}$. D'après la question précédente, $m = 0,68 < 0,707$, on pourra donc visualiser un phénomène de résonance.

B.4 Ce montage est un filtre passe bas du second ordre.

C Association des deux montages

C.1 $\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{v_s}}{\underline{v_e}} = \frac{\underline{v_s}}{\underline{v_1}}\frac{\underline{v_1}}{\underline{v_e}} = \frac{A}{1+2jm\frac{\omega}{\omega_0}-(\frac{\omega}{\omega_0})^2}$.

C.2 $G_{dB} = 20\log|\underline{H}|$ et $\varphi = \arg \underline{H}$.

C.3

Pulsation	$\underline{H}_5$	G_{5dB}	φ_5
$\omega \longrightarrow 0$	$\underline{H}(j\omega) \sim A$	$G_{dB} = 20\log A = 26,4\ dB$	$\varphi = 0$
$\omega \longrightarrow \infty$	$\underline{H}(j\omega) \sim \frac{-A\omega_0^2}{\omega^2}$	$G_{dB} = -40\log\omega + 20\log A\omega_0^2$	$\varphi = -\pi$

C.4 Lorsque $\omega = \omega_0$, $\underline{H}(j\omega) = \frac{A}{2jm}$, on en déduit $G_{dB} = 23,7\ dB$ et $\varphi = -\frac{\pi}{2}$

C.5 cf cours.

Problème II Ascension atmosphérique en montgolfière

A Atmosphère en équilibre

A.1 Atmosphère isotherme

A.1.1 On a $PV = \frac{m}{M_e} RT_0$ donc $\boxed{\mu = \frac{M_e P}{RT_0}}$

A.1.2 Pour trouver la relation fondamentale de la statique des fluides, on effectue un bilan de forces sur une particule mésoscopique de fluide. La projection de ces forces suivant $\overrightarrow{u_z}$ permet d'écrire : $\boxed{\frac{dP}{dz} = -\mu g}$. En remplaçant μ par son expression, on obtient : $\frac{dP}{dz} = -\frac{M_e g}{RT_0} P$ soit en intégrant en considérant que $P(z = 0) = P_0$, on obtient $\boxed{P(z) = P_0 e^{-\frac{z}{H}}}$ avec $H = \frac{RT_0}{M_e g}$

A.1.3 $M_e = 20\% M_{O_2} + 80\% M_{N_2} = 28,8.10^{-3}\ kg.mol^{-1}$. On obtient alors $\boxed{H = 8,5\ km}$ (environ l'altitude l'Everest ; or, au sommet de l'Everest la température est bien différente de 288 K : ce modèle n'est donc pas réaliste !). On résout $\frac{P_0}{2} = P_0 e^{-\frac{z^{iso}_{50\%}}{H}}$, soit $\boxed{z^{iso}_{50\%} = H \ln 2 = 5,9\ km}$

A.2 Équilibre polytropique

A.2.1 La relation fondamentale de la statique des fluides reste valable mais cette fois T dépend de l'altitude. $\frac{dP}{dz} = -\frac{M_e g}{RT} P = -\frac{dz}{H(1-\alpha z)}$. En séparant les variables, on obtient : $\frac{dP}{P} = -\frac{dz}{H(1-\alpha z)}$, puis en intégrant sachant que $p(z = 0) = P_0$, on obtient : $\boxed{P(z) = P_0(1 - \alpha z)^\beta}$ avec $\boxed{\beta = \frac{1}{H\alpha} = \frac{z_0}{H}}$. La loi de gaz parfait permet de déterminer $\boxed{\mu = \frac{M_e P}{RT} = \mu_0 (1 - \alpha z)^{\beta - 1}}$ avec $\mu_0 = \frac{M_e P_0}{RT_0}$.

A.2.2 On résout $\frac{P_0}{2} == P_0(1 - \alpha z^{pol}_{50\%})^\beta$ soit $\boxed{z^{pol}_{50\%} = z_0(1 - 2^{-\frac{1}{\beta}}) = 5,4\ km}$. Cette valeur est proche de celle obtenue précédemment mais légèrement inférieure ce qui est logique puisque la température diminue lorsuqe l'altitude augmente. En supposant la température constante (agitation thermique constante), on surestime la pression à une température donnée.

A.2.3 Si l'on suppose que la température est une fonction linéaire de l'altitude, on doit prendre comme ordonnée à l'origine 288, 14 K ce qui est en excellent accord avec $T_0 = 288\ K$ et alors $z_0 = \frac{288}{6,94} = 41,5\ km$. Si l'on considère l'équation pour la pression, $P_0 = 1,01\ Pa$ qui est en accord avec $P_0 = 1013\ hPa$; et de β, on déduit $H = 7,9\ km$ qui est proche de la valeur théorique mais un peu différente (venant sans doute de la linéarisation).

B Ascension de la montgolfière

B.1 D'après l'équation des gaz parfaits : $P_i V_0 = \frac{m_i}{M_e} RT_i$ et $P_i = P_e$, donc $\boxed{m_i = \frac{P_e V_0 M_e}{RT_i}}$ et comme $\mu_e = \frac{P_e M_e}{RT_e}$, $\boxed{m_i = \frac{T_e}{T_i} V_0 \mu_e}$.

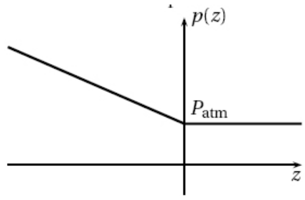
B.2 À l'équilibre mécanique, la poussée d'Archimède compense le poids de la montgolfière et de l'air chaud qu'elle contient : $(m + m_i)g = \mu_e V_0 g$ et $\mu_e = m_i \frac{T_i}{V_0 T_e}$ soit $\boxed{m = m_i(\frac{T_i}{T_e} - 1)}$.

B.3 On a $m = V_0\mu_e - m_i = V_0\mu_e(1 - \frac{T_e}{T_i})$. en $z = 0$, $T_i = T_d$ et $\mu_e = \mu_0$ soit $\boxed{\frac{m}{V_0\mu_0} = 1 - \frac{T_0}{T_d}}$.

L'application numérique donne $\boxed{T_d = \frac{T_0}{1 - \frac{m}{V_0\mu_0}} = 362\ K}$.

Problème III La plongée sous marine

A Plongée libre (sans bouteille)



A.1 LD'après la relation fondamentale de la statique des fluides on a $\frac{dP}{dz} = -\rho g$. Comme ρ est constant, on a alors $\boxed{P(z) = P_{\text{atm}} - \rho g z = 1,013.10^5 - 9,81.10^3 z}$. On a donc le graphe ci-contre.

A.2 L'évolution se faisant à température constante et le gaz étant parfait, on a donc : $P(z)V(z) = P_{\text{atm}}V_M$ d'où $\boxed{V(z) = \frac{P_{\text{atm}}V_M}{P_{\text{atm}}-\rho g z}}$ A.N. $\boxed{V(-10) = 3,6.10^{-3}\ \text{m}^3}$.

Comme le plongeur retient sa respiration au cours de la plongée son poids reste constant. Par contre la poussée d'Archimède qui est proportionnelle au volume du plongeur diminue légèrement puisque le volume des poumons diminue. Le poids apparent est donc $\overrightarrow{P}_a = \overrightarrow{P}_{\text{arch}} + m\overrightarrow{g} = g(\rho V^*(z) - m)\overrightarrow{u_z} = P_a\overrightarrow{u_z}$. Donc P_a diminue avec z.

A.3 La flottabilité est nulle quand $P_a = 0$ *i.e.* quand $\rho(V_0 + V(z)) = m + m_1$ d'où :
$\boxed{m_1 = \rho\left(V_0 + \frac{P_{\text{atm}}V_M}{P_{\text{atm}}-\rho g z}\right) - m}$ A.N. $\boxed{m_1 = 1,7\ \text{kg}}$

B Plongée avec bouteille et détendeur

B.1 Remplissage de la bouteille

B.1.1 À la fin de l'admission, la pression est P_{atm} et le volume est V_{max}. Dès que le piston change de sens, S est fermé et S' s'ouvre. La transformation étant isotherme et le gaz parfait, on a donc : $P_{\text{atm}}(V_{\text{max}} + V_b) = P_b(V_{\text{min}} + V_b)$ d'où $\boxed{P_b = \frac{P_{\text{atm}}(V_{\text{max}}+V_b)}{V_{\text{min}}+V_b}}$

Avant la compression le nombre de mole de gaz était : $n_i = \frac{P_{\text{atm}}V_b}{RT_a}$. À la fin de la compression il est : $n_f = \frac{P_bV_b}{RT_a}$. D'où : $\Delta n = \frac{V_b}{RT_a}\left(\frac{P_{\text{atm}}(V_{\text{max}}+V_b)}{V_{\text{min}}+V_b} - P_{\text{atm}}\right) = \frac{V_b}{RT_a}\frac{P_{\text{atm}}(V_{\text{max}}-V_{\text{min}})}{V_{\text{min}}+V_b}$.
Avec l'hypothèse $V_{\text{min}} \ll V_b$, on obtient :
$\boxed{\Delta n = \frac{P_{\text{atm}}(V_{\text{max}}-V_{\text{min}})}{RT_a}}$ A.N. $\boxed{\Delta n = 8,2.10^{-2}\ \text{mol}}$

B.1.2 La soupape S' s'ouvre quand la pression dans le compresseur est égale à la pression dans la bouteille. Comme la compression est isotherme et le gaz parfait, on obtient : $\boxed{V' = \frac{P_{\text{atm}}V_{\text{max}}}{P}}$.

Après l'admission la compression reste isotherme, donc $P'(V_{\text{min}}+V_b) = P(V'+V_b)$ d'où $\boxed{P' = \frac{P_{\text{atm}}V_{\text{max}}+V_bP}{V_b+V_{\text{min}}}}$.

On a donc $\Delta P = \frac{P_{\text{atm}}V_{\text{max}}+V_bP}{V_b+V_{\text{min}}} - P$ et donc $\boxed{\Delta P = \frac{P_{\text{atm}}V_{\text{max}}-PV_{\text{min}}}{V_b+V_{\text{min}}}}$.

Le remplissage de la bouteille s'arrête quand $\Delta P = 0$ *i.e.* quand $P_{\text{atm}}V_{\text{max}} = PV_{\text{min}}$ d'où $\boxed{P_{\text{max}} = \frac{P_{\text{atm}}V_{\text{max}}}{V_{\text{min}}}}$, ce qui correspond au cas où le piston arrive en AA' sans que la soupape S' ne s'ouvre ($V' = V_{\text{min}}$).

B.1.3 A.N. $\boxed{\Delta P = 0,32.10^5\ \text{Pa}}$ et $\boxed{P_{\text{max}} = 1,0.10^7\ \text{Pa}}$.

B.1.4 On a donc $\frac{\Delta P}{\Delta t} = \alpha\frac{P_{\text{atm}}V_{\text{max}}-PV_{\text{min}}}{V_b+V_{\text{min}}}$. On peut alors écrire : $\boxed{\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} + \frac{\alpha V_{\text{min}}}{V_b+V_{\text{min}}}P = \alpha\frac{P_{\text{atm}}V_{\text{max}}}{V_b+V_{\text{min}}}}$

B.1.5 Compte tenu de $V_{\text{min}} \ll V_b$, l'équation différentielle s'écrit : $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} + \frac{P}{\tau} = \alpha\frac{P_{\text{atm}}V_{\text{max}}}{V_b}$. Après intégration de l'équation différentielle du 1$^{\text{er}}$ordre à coefficients constants, on obtient, avec la condition initiale $P(0) = P_{\text{atm}}$:
$\boxed{P(t) = (P_{\text{atm}} - P_{\text{max}})\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + P_{\text{max}}}$

On a donc $T = -\tau\ln\frac{P-P_{\text{max}}}{P_{\text{atm}}-P_{\text{max}}}$ et donc $\boxed{T = 41,9\ \text{s}}$.

B.2 Utilité du détendeur

B.2.1 Le gaz étant parfait, on a donc $\boxed{n_i = \frac{PV_b}{RT_a}}$ et $\boxed{n_s = \frac{P_sV_b}{RT_e}}$. A.N. $\boxed{n_i = 21 \text{ mol}}$ et $\boxed{n_s = 0,84 \text{ mol}}$

B.2.2 À chaque respiration le plongeur consomme $n(z) = \frac{P(z)\Omega_0}{RT_e}$ mole d'air. Il consomme le gaz en $\frac{n_i - n_s}{n(z)}$ respirations et donc le temps au bout duquel le détendeur se bloque est $\boxed{\Delta t_s(z) = \frac{1}{f}\frac{(n_i - n_s)}{\Omega_0}\frac{RT_e}{P_{\text{atm}} - \rho g z}}$ A.N. $\boxed{\Delta t_s(z) = 396 \text{ s}}$

Remarque : ce temps peut surprendre (6 minutes 36 secondes), mais il est dû au choix des valeurs numériques. Dans la réalité la bouteille a une contenance de 12 l et est gonflée sous une pression de 200 bar.

B.2.3 On a donc $\boxed{\frac{\Delta t_s(z)}{\Delta t_s(0)} = \frac{T_e}{T_a}\frac{P_{\text{atm}}}{P_{\text{atm}} - \rho g z}}$ A.N. $\boxed{\frac{\Delta t_s(-20)}{\Delta t_s(0)} = 0,33}$. La durée d'utilisation d'une bouteille diminue donc rapidement avec la profondeur.