Les mathématiques, pilier de la physique moderne

Denis Gratias LEM CNRS/ONERA Châtillon

7 septembre 2007

Introduction

Nous nous proposons de discuter ici deux aspects essentiels des mathématiques utilisées par les physiciens :

- le principe variationnel,
- le lien entre la géométrie et certains ensembles de fonctions.

Le principe variationnel

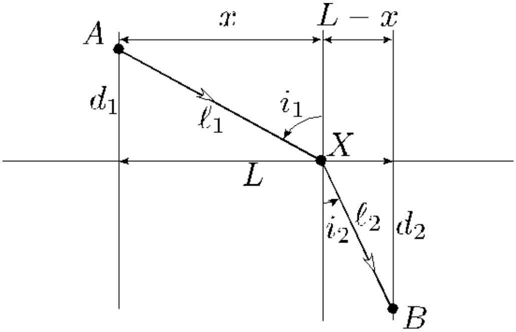
La physique s'appuie sur des postulats obtenus par induction à partir de l'expérience.
Ainsi la formule de Newton, loi fondamentale de la mécanique newtonienne,

$$\vec{f} = m\ddot{\vec{x}} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

est un postulat.
Les physiciens du XIX$^{\text{e}}$siècle, fascinés par cett formule, ont tenté d'en découvrir *le sens caché* sous la forme d'un postulat de portée plus générale.
L'idée, due à Louis Lagrange, est la suivante :
Parmi toutes les solutions possibles de lois pour la physique, celles effectivement choisies par la nature sont singulières au regard de certaines propriétés.
Elles se différencient de toutes les autres par une propriété extrémale qu'elles sont seules à posséder.

La notion d'extrémum

Un exemple simple est celui posé par le problème du maître-nageur.
Un maître-nageur (A) doit porter secours *au plus vite* à un nageur imprudent (B). Quel chemin optimum en temps doit-il parcourir sachant qu'il *court* à une vitesse v_1 et *nage* à une vitesse v_2 ?



Soient ℓ_1 et ℓ_2 les distances à parcourir par le maître-nageur respectivement sur la terre et en mer. Le temps global T pour atteindre le nageur est $T = t_1 + t_2$ avec $t_1 = \ell_1/v_1$ et $t_2 = \ell_2/v_2$. On a les relations géométriques évidentes suivantes :

$$x = \ell_1 \sin i_1 \quad L - x = \ell_2 \sin i_2$$

et

$$t_1 = \ell_1/v_1 = (x^2+d_1^2)^{1/2}/v_1 \quad t_2 = \ell_2/v_2 = ((L-x)^2+d_2^2)^{1/2}/v_2$$

Le temps total optimal est obtenu pour la valeur de x comprise entre 0 et L qui minimise la fonction $T(x) = t_1(x) + t_2(x)$, soit la valeur de x telle que :

$$\frac{dT(x)}{dx} = \frac{dt_1}{dx} + \frac{dt_2}{dx} = \frac{x}{v_1 \ell_1} + \frac{x - L}{v_2 \ell_2} = 0$$

d'où

$$\frac{x}{v_1 \ell_1} = \frac{L - x}{v_2 \ell_2} \quad \text{ou} \quad \frac{\ell_1 \sin i_1}{v_1 \ell_1} = \frac{\ell_2 \sin i_2}{v_2 \ell_2}$$

soit enfin en posant $n_1 = 1/v_1$ et $n_2 = 1/v_2$:

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$$

C'est l'équivalent de l'équation de Snell-Descartes pour la réfraction d'un faisceau lumineux passant d'un milieu d'indice $n_1 = c/v_1$ à un autre d'indice $n_2 = c/v_2$.

La loi de Snell-Descartes

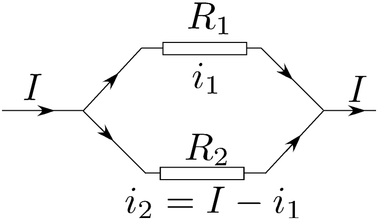
La loi de Snell-Descartes

$$\boxed{n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2}$$

énonce le fait que la lumière choisit parmi touts les chemins optiques celui qui *minimise* son temps de parcours total dans les deux milieux.

Autre exemple : une économie d'énergie

On se propose de déterminer les courants i_1 et i_2 du circuit électrique ci-dessous qui minimisent la perte thermique de l'ensemble par effet Joule.



$$W = R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2$$

W est une parabole qui admet un minimum en

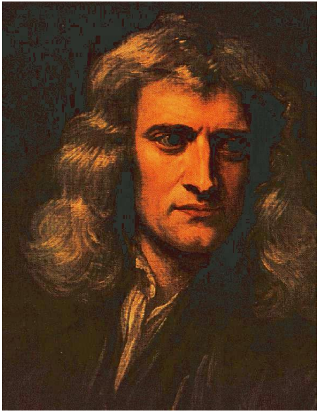
$$\frac{dW}{di_1} = 2R_1 i_1 - 2R_2(I - i_1) = 2(R_1 i_1 - R_2 i_2) = 0$$

d'où

$$\boxed{R_1 i_1 = R_2 i_2}$$

La loi de Kirchhoff donne la répartition d'intensité d'un circuit de résistances en dérivation qui minimise la perte thermique par effet Joule.

Le sens caché de l'équation de Newton

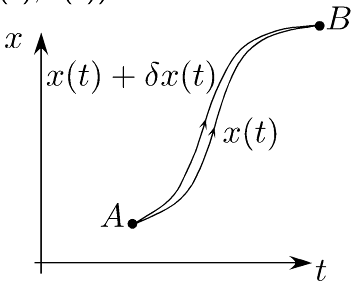


Isaac Newton

Louis Lagrange (1736—1813) imagine qu'il existe une fonction (que nous appelons le *Lagrangien*), notée $\mathcal{L}$, des grandeurs dynamiques $x(t)$ la trajectoire, et $\dot{x}(t)$ la vitesse instantanée, dont dont l'intégrale dans le temps est *extrémale* pour la trajectoire $x(t)$ *effectivement* choisie par la nature.

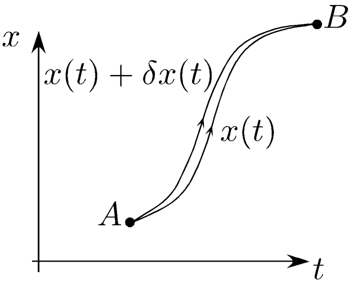
L'équation d'Euler-Lagrange

On considère toutes les trajectoires $x(t)$ reliant le point A au point B ; celle effectivement choisie par la nature minimise le Lagrangien $\mathcal{L}(x(t), \dot{x}(t))$.



Considérons deux chemins infiniment proches $x(t)$ et $x(t) + \delta x(t)$ passant l'un et l'autre par les points A à l'instant t_0 et B à l'instant t_1 ($\delta x(t_0) = \delta x(t_1) = 0$).

Euler-Lagrange (suite)



Au chemin $x(t)$ est associée la dérivée $\dot{x}(t)$ et au chemin $x(t) + \delta x(t)$ la dérivée $\dot{x}(t) + \delta\dot{x}(t)$ avec $\delta\dot{x}(t) = d\delta x(t)/dt$.

Euler-Lagrange (suite)

Considérons maintenant l'intégrale $\mathcal{S}$:

$$\mathcal{S} = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(x, \dot{x})\, dt$$

Passer du chemin $x(t)$ au chemin $x(t) + \delta x(t)$ fait varier cette intégrale d'une quantité $\delta\mathcal{S}$:

$$\delta\mathcal{S} = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x} \right) \, dt$$

Euler-Lagrange (suite)

Le deuxième terme du membre de droite se transforme selon :

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x}\, dt &= \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \frac{d}{dt} \delta x\, dt \\ &= \underbrace{\delta x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \Big]_{t_0}^{t_1}}_{=0} - \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \delta x\, dt \\ &= - \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \delta x\, dt\end{aligned}$$

on obtient ainsi :

$$\delta \mathcal{S} = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) \delta x\, dt$$

L'intégrale est extrémale lorsque $\delta\mathcal{S}$ est nul, et ce pour toute variation arbitraire δx.
Il faut donc que l'intégrand soit nul, d'où la formule dite de Euler-Lagrange :

$$\boxed{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x} = \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}}}$$

Le Lagrangien $\mathcal{L}$ d'un système mécanique est un extremum pour la trajectoire $x(t)$ qui satisfait la formule de Euler-Lagrange.

Lagrangien d'une particule libre

Le Lagrangien :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m\dot{x}^2$$

conduit à la loi de Newton d'une particule libre $m\ddot{x} = 0$.
En effet :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$$
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\ddot{x}$$

ce qui, d'après la formule d'Euler-Lagrange, donne $m\ddot{x} = 0$.

Lagrangien d'une particule plongée dans un potentiel scalaire

Pour une particule plongée dans un potentiel scalaire $V(x)$, le Lagrangien est la fonction obtenue en effectuant la *différence* entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 - V(x)$$

en effet :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -\frac{\partial V(x)}{\partial x}$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$$
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\ddot{x}$$

d'où, en égalant :

$$m\ddot{x} = -\partial V(x)/\partial x$$

On voit ainsi que la loi de Newton résulte du fait que le chemin mécanique d'une particule plongée dans un potentiel $V(x)$ est celui qui minimise *l'échange* entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle.

Résumé

Les lois de la physique traduisent un principe fondamental puissant qui stipule que parmi toutes les solutions possibles, la nature choisit celle(s) qui correspondent à un extremum au moins d'une propriété physique.
La physique moderne part de ce principe pour construire les modèles ultimes et encore très hypothétiques actuels de la matière.
La physique est aux mathématiques ce que le superlatif est à la grammaire.

Espaces vectoriels de fonctions

- Le principe variationnel fait intervenir des fonctions à titre de "variables". La physique quantique, partie centrale de la physique moderne et dont toutes les autres branches dépendent, part du postulat que les particules sont décrites par des fonctions dont les carré représentent la densité de probabilité de présence de la particule (et sont donc de carré sommable).
- le cadre mathématique qui sous-tend la physique quantique est que ces fonctions définissent des **espaces vectoriels** et sont donc semblables à des **vecteurs**.
- on peut donc ramener les problèmes d'analyse liés à la manipulation des ces fonctions à des problèmes de géométrie.

Un exemple simple

Considérons l'ensemble des fonctions réelles définies entre 0 et 2π de la forme :

$$f(x) = a\cos(x) + b\sin(x)$$

où a et b sont des valeurs réelles.
Cet ensemble forme un groupe additif.

Produit scalaire

Soient $f(x) = a\cos(x) + b\sin(x)$ et $g(x) = c\cos(x) + d\sin(x)$, deux fonctions de cet ensemble. On définit le produit scalaire $\langle f|g\rangle$ par l'intégrale :

$$\langle f|g\rangle = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx = (ac + bd)$$

Observant que

$$\langle\cos(x)|\cos(x)\rangle = \langle\sin(x)|\sin(x)\rangle = 1$$

et que

$$\langle\cos(x)|\sin(x)\rangle = 0$$

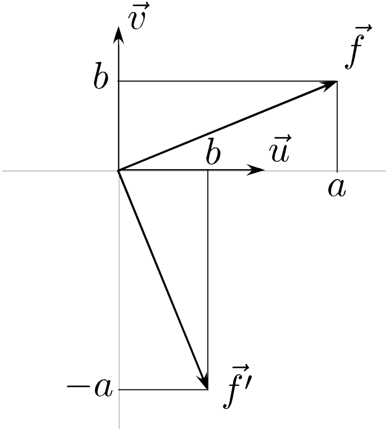
on peut considérer les fonctions $\cos(x)$ et $\sin(x)$ comme deux vecteurs unitaires orthogonaux $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan. Les fonctions $f(x)$ et $g(x)$ sont alors dans cette représentation des vecteurs de coordonnées $\vec{f} = (a, b)$ et $\vec{g} = (c, d)$.

Dans cet espace, l'action de dérivation $\widehat{\mathbf{D}} = \frac{d}{dx}$ est défini par :

$$\widehat{\mathbf{D}}\vec{u} = -\vec{v}, \;\; \widehat{\mathbf{D}}\vec{v} = \vec{u}$$

et est donc est représentable par une matrice de rang 2 d'éléments :

$$\widehat{\mathbf{D}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$



Ainsi, l'opération de dérivation est maintenant une rotation de $\pi/2$. Une opération d'analyse est transformée en une opération de géométrie !
Le vecteur $\vec{f}'$,la dérivée de $\vec{f}$ lui est orthogonale :

$$\vec{f}' = b\cos(x) - a\sin(x), \ \langle f'|f\rangle = (ab - ba) = 0$$

et $\vec{f}$" la dérivée seconde vaut $-\vec{f}$ (rotation de π).

Conclusion

Les mathématiques sont le langage naturel de la physique.
Celle-ci se construit en s'appuyant principalement deux aspects des mathématiques : le calcul variationnel dans toute sa généralité et la représentation géométrique des fonctions manipulées par la physique.
Ceci explique pourquoi la géométrie est une discipline si importante des mathématiques pour les physiciens.