Correction DL n°16.

Exercice 1:

4a) $\varphi_x : t \mapsto e^{xsin(t)}$ est 2π-périodique, de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, donc la série de Fourier associée à φ_x est normalement convergente, et φ_x est développable en série de Fourier sur $\mathbb{R}$.

4b) $d_k(x) = \dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{xsin(t)-ikt}dt$ est le coefficient de Fourier d'indice k.

On peut écrire (4a) : $\forall X \in \mathbb{R}, \varphi_x(X) = \displaystyle\sum_{k\in\mathbb{Z}} d_k(x)e^{ikX}$.

φ_x est continue, 2π-périodique, donc l'égalité de Parseval s'applique : $\dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi_x(t)^2dt = \displaystyle\sum_{k\in\mathbb{Z}}|d_k(x)|^2$.

4c) $\forall x \in \mathbb{R}, d_k(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\sum_{n\geqslant 0}\frac{x^n sin^n(t)}{n!}e^{-ikt}dt$

$x \in \mathbb{R}$, fixé, $t \in [0, 2\pi]$, posons $u_n(t) = \dfrac{x^n sin^n(t)}{n!}e^{-ikt}$, alors $|u_n(t)| \leqslant \dfrac{|x|^n}{n!}$, la série de fonctions $\sum u_n$ est alors normalement convergente sur $[0, 2\pi]$, donc intégrable terme à terme sur $[0, 2\pi]$,

et on a : $d_k(x) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{x^n}{n!}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} sin^n(t)e^{-ikt}dt = \sum_{n\geqslant 0}\frac{x^n}{n!}\frac{1}{2\pi}I_{k,n}$.

4d) $\forall k \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}, I_{k,n} = \displaystyle\int_0^{2\pi} sin^n(t)e^{-ikt}dt = \frac{1}{(2i)^n}\int_0^{2\pi}\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}(-1)^p e^{i(n-2p-k)t}dt =$

$\dfrac{1}{(2i)^n}\displaystyle\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}(-1)^p\int_0^{2\pi} e^{i(n-2p-k)t}dt$.

$\int_0^{2\pi} e^{i(n-2p-k)t}dt = 0$ sauf si $n = 2p + k$, avec $0 \leqslant p \leqslant n$, c'est-à-dire $p \geqslant max(0, -k)$.

$I_{k,2p+k} = \dfrac{1}{(2i)^{2p+k}}\dbinom{2p+k}{p}(-1)^p 2\pi = \dfrac{1}{(2)^{2p+k}}\dfrac{1}{i^k}\dbinom{2p+k}{p}2\pi$

donc $d_k(x) = \displaystyle\sum_{p\geqslant max(0,-k)}\frac{x^{2p+k}}{(2p+k)!}\binom{2p+k}{p}\frac{1}{2^{2p+k}}\frac{1}{i^k} = \frac{1}{i^k}\sum_{p\geqslant max(0,-k)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2p+k}\frac{1}{p!(p+k)!}$.