

Devoir Surveillé n°6

PSI
MATHÉMATIQUES

Samedi 21 Mars 2009

PSI

Durée : 4 heures

Exercice 1 : exercice 2 CCP 2006 MP

On considère la fonction f définie sur \mathbf{R} de la façon suivante : f est une fonction 2π périodique, f est une fonction paire et pour tout $x \in [0, \pi]$: $f(x) = x^2$.

1. Déterminer la série de Fourier de la fonction f .

2. En déduire, avec soin, les réels : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

3. Déterminer, en énonçant le théorème utilisé, le réel : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.

Exercice 2 : extrait de l'exercice 1 es3a 2004 PSI

\mathbf{R} est le corps des nombres réels et n un entier naturel.

E est le \mathbf{R} espace vectoriel normé des applications continues de $[-\pi, \pi]$ vers \mathbf{R} muni de la norme de la convergence uniforme, ainsi pour f élément de E , $\|f\|_{\infty} = \sup_{x \in [-\pi, \pi]} |f(x)|$.

On considère un endomorphisme de E noté T vérifiant les deux propriétés (P_1) et (P_2) suivantes :

(P_1) si f est un élément de E de classe C^1 , $T(f)$ est de classe C^1 et $T(f') = T(f)'$.

et

(P_2) pour toute suite $(f_n)_n$ qui converge dans $(E, \|\cdot\|_{\infty})$, la suite $(T(f_n))_n$ converge dans $(E, \|\cdot\|_{\infty})$ et $T(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} T(f_n)$.

Pour tout n , $n \geq 1$, on considère les applications c_n et s_n de $[-\pi, \pi]$ vers \mathbf{R} définies par :

$$c_n(x) = \cos(nx) \text{ et } s_n(x) = \sin(nx).$$

On note c_0 l'application de $[-\pi, \pi]$ vers \mathbf{R} définie par : $c_0(x) = 1$.

Le but de l'exercice est d'établir qu'il existe un réel λ tel que : $\forall f \in E$, $T(f) = \lambda f$.

1° Dans cette question on établit quelques résultats indépendants les uns des autres qui pourront être utilisés dans la suite de l'exercice.

a) On suppose $n \geq 1$. Quelles sont les fonctions réelles solutions sur \mathbf{R} de l'équation différentielle : $y'' + n^2 y = 0$?

b) Soit f un élément de E . Prouver qu'il existe g et h appartenant à E tels que :

$$f = g + h, \quad g \text{ est paire, } h \text{ est impaire.}$$

c) Soit $\tilde{\varphi}$ l'application de \mathbf{R} vers \mathbf{R} , 2π -périodique, telle que : $\forall x \in [-\pi, \pi]$, $\tilde{\varphi}(x) = x^2$.

Calculer les coefficients de Fourier réels de $\tilde{\varphi}$.

Étudier la convergence de la série de Fourier de $\tilde{\varphi}$ (préciser le mode de convergence de cette série et sa somme).

2° Premières propriétés de T .

a) Soit $(u_n)_n$ une suite d'éléments de E . On suppose que la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur $[-\pi, \pi]$. On pose : $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Justifier que S appartient à E , que la série de fonctions $\sum T(u_n)$ converge uniformément sur $[-\pi, \pi]$ et que : $T(S) = \sum_{n=0}^{+\infty} T(u_n)$.

b) Soit f un élément de E , f de classe C^n , $n \geq 1$. Montrer que $T(f)$ est de classe C^n et que : $T(f^{(n)}) = T(f)^{(n)}$.

En déduire que si f est de plus une fonction polynomiale, alors $T(f)$ est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à celui de f .

3° Étude de $T(c_n)$ et de $T(s_n)$.

a) Prouver qu'il existe un réel α_0 tel que : $T(c_0) = \alpha_0 c_0$ et que pour $n \geq 1$, il existe (α_n, β_n) de \mathbf{R}^2 , tel que : $T(c_n) = \alpha_n c_n + \beta_n s_n$.

b) Soit φ l'élément de E défini par : $\forall x \in [-\pi, \pi]$, $\varphi(x) = x^2$. Justifier l'existence de (λ, μ, ν) de \mathbf{R}^3 tel que : $\forall x \in [-\pi, \pi]$, $T(\varphi)(x) = \lambda x^2 + \mu x + \nu$.

c) En déduire que :

$$(*) \quad \forall x \in [-\pi, \pi], \lambda x^2 + \mu x + \nu = \alpha_0 \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} (\alpha_n \cos(nx) + \beta_n \sin(nx)).$$

d) Montrer que :

i) $\mu = 0$.

ii) $\forall n \geq 1, \alpha_n = \lambda$ et $\beta_n = 0$. (Montrer que (*) est le développement en série de Fourier de $x \mapsto \lambda x^2 + \nu$)

iii) $\alpha_0 = \lambda$ et $\nu = 0$. (utiliser $T(\varphi'')$)

e) Établir que pour tout n , $T(c_n) = \lambda c_n$ et que pour $n \geq 1$, $T(s_n) = \lambda s_n$.

4° Etude de $T(f)$.

a) Soit f un élément de E , f de classe C^1 , tel que $f(\pi) = f(-\pi)$. On note \tilde{f} l'application de \mathbb{R} vers \mathbb{R} , 2π -périodique, telle que : $\forall x \in [-\pi, \pi]$, $\tilde{f}(x) = f(x)$.

Etudier la convergence de la série de Fourier de \tilde{f} . En déduire que : $T(f) = \lambda f$.

b) Soit f un élément de E , f impaire. Soit F une primitive de f sur $[-\pi, \pi]$. Calculer $T(F)$.

En déduire que : $T(f) = \lambda f$.

c) Soit f un élément quelconque de E . Montrer que : $T(f) = \lambda f$.

Exercice 3 : exercice 2 e3a 2004 MP

On considère le \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{R}^3 . On le munit du produit scalaire euclidien canonique $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne associée $\| \cdot \|$, c'est à dire : pour tout $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ et tout $w = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3$,

$$\langle v, w \rangle = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 \text{ et } \|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}.$$

On remarquera que $\langle v, w \rangle = (v_1, v_2, v_3) \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$.

On note $M_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $(3, 3)$ à coefficients réels, et I la matrice identité de $M_3(\mathbb{R})$. Une matrice symétrique dont toutes les valeurs propres sont strictement positives est dite **définie positive**.

Pour $A \in M_3(\mathbb{R})$, on note $\mathcal{E}(A)$ le sous-ensemble de \mathbb{R}^3 défini par :

$$\mathcal{E}(A) = \{x \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } \|Ax\| = 1\}.$$

1. Soit P dans $M_3(\mathbb{R})$. On suppose que P est une matrice orthogonale.

Montrer que $\mathcal{E}(P)$ est l'ensemble des vecteurs de \mathbb{R}^3 , de norme 1 (c'est-à-dire la sphère unité).

2. Soient $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ des réels tous non nuls. Soit D la matrice diagonale :

$$D = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix}.$$

Montrer que $\mathcal{E}(D)$ est un ellipsoïde.

3 Soit A dans $M_3(\mathbb{R})$. On suppose A inversible.

(i) Justifier que tAA est une matrice symétrique définie positive.

(ii) En déduire qu'il existe une matrice diagonale D , avec des coefficients diagonaux strictement positifs, et une matrice orthogonale P telles que

$${}^tAA = {}^tP D^2 P.$$

(iii) On pose $S = {}^tP D P$. Démontrer que S est une matrice symétrique définie positive.

(iv) Montrer que la matrice Q , définie par $Q = AS^{-1}$, existe et est une matrice orthogonale.

(v) En déduire que $\mathcal{E}(A) = \mathcal{E}(S)$.

(vi) Démontrer que $\mathcal{E}(A)$ est un ellipsoïde.

4 Soient S et S' dans $M_3(\mathbb{R})$. On suppose que S et S' sont des matrices symétriques définies positives et que $\mathcal{E}(S) = \mathcal{E}(S')$.

(i) Soit v un vecteur non nul. En considérant le vecteur $v/\|S(v)\|$, démontrer que $\|S(v)\| = \|S'(v)\|$.

(ii) En déduire que :

$$\forall v \in \mathbb{R}^3, \forall w \in \mathbb{R}^3, \langle S(v), S(w) \rangle = \langle S'(v), S'(w) \rangle.$$

On pourra commencer par exprimer le produit scalaire de deux vecteurs x et y en fonction des normes des vecteurs $x+y$ et $x-y$.

(iii) En déduire :

$$\forall v \in \mathbb{R}^3, \forall w \in \mathbb{R}^3, \langle S^2(v), w \rangle = \langle S'^2(v), w \rangle$$

(iv) Montrer que : $S^2 = S'^2$.

(v) Pour cette question, on admettra et on utilisera le résultat suivant :

$$\forall \alpha \neq 0, \ker(S^2 - \alpha^2 I) = \ker(S - \alpha I) \oplus \ker(S + \alpha I)$$

et cette relation est aussi vérifiée pour S'

- Montrer que S et S' ont mêmes valeurs propres.

- En déduire : $S = S'$.

5 Soient A et A' dans $M_3(\mathbb{R})$, supposées inversibles. Montrer que $\mathcal{E}(A) = \mathcal{E}(A')$ si et seulement si il existe une matrice orthogonale V telle que $A = VA'$.