Devoir Libre $n^{\circ}1$

PSI

MATHEMATIQUES

(à rendre Lundi 7 Septembre 2009)

Problème 1

$I\!K$ désigne $I\!R$ ou $\mathbb{C}$.

Soient $(a, b) \in I\!K^2$; on note par $E_{a,b}$ l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in I\!N}$ dans $I\!K$ telle que :

$$\forall n \in I\!N,\ u_{n+2} = a\,u_{n+1} + b\,u_n$$

Ces suites sont appelées **suites récurrentes linéaires du second ordre à coefficients constants**.

Partie I : Structure et Dimension de $E_{a,b}$.

1) Montrer que $E_{a,b}$ est un $I\!K$.e.v.

2) Montrer que l'application définie par :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} E_{a,b} & \to & I\!K^2 \\ (u_n)_{n\in I\!N} & \longmapsto & (u_0, u_1) \end{array}$$

est un isomorphisme.

3) En déduire que $E_{a,b}$ est un $I\!K$.e.v de dimension finie et déterminer sa dimension.

Partie II : Expression du terme général d'un élément de $E_{a,b}$.

1) Montrer que $E_{a,b}$ contient des suites géométriques non nulles si et seulement si l'équation
$r^2 - ar - b = 0$ d'inconnue r admet des solutions dans $I\!K$.

2) Dans cette question, nous supposons que l'équation $r^2 - a\,r - b = 0$ admet deux solutions dans $I\!K$ distinctes, notées r_1 et r_2 non nulles.

a) Montrer que $(r_1^n)_{n\in I\!N}$ et $(r_2^n)_{n\in I\!N}$ sont des suites géométriques de $E_{a,b}$.
b) Montrer que la famille $((r_1^n)_{n\in I\!N}, (r_2^n)_{n\in I\!N})$ est une base de $E_{a,b}$.
c) En déduire le terme général d'une suite $(u_n)_{n\in I\!N}$ de $E_{a,b}$ en fonction de u_0, u_1, r_1, r_2.
d) Application : Déterminer le terme général de la suite $(\Phi_n)_{n\in I\!N}$ (appelée suite de Fibonacci) définie par :

$$\begin{cases} \Phi_0 = 0, \quad \Phi_1 = 1 \\ \forall n \in I\!N \quad \Phi_{n+2} = \Phi_{n+1} + \Phi_n \end{cases}$$

3) Dans cette question, nous supposons que l'équation $r^2 - a\,r - b = 0$ admet une solution et une seule dans $I\!K$, notée r_0, non nulle.

a) Montrer que $(r_0^n)_{n\in I\!N}$ et $(n\,r_0^n)_{n\in I\!N}$ sont des suites de $E_{a,b}$.
b) Montrer que la famille $((r_0^n)_{n\in I\!N}, (nr_0^n)_{n\in I\!N})$ est une base de $E_{a,b}$.
c) En déduire le terme général d'une suite $(u_n)_{n\in I\!N}$ de $E_{a,b}$ en fonction de u_0, u_1, r_0.
d) Application : Déterminer le terme général de la suite $(u_n)_{n\in I\!N}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1, \quad u_1 = i \\ \forall n \in I\!N \quad u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n \end{cases}$$

4) Dans cette question, nous supposons que l'équation $r^2 - a\,r - b = 0$ n'a pas de solution dans $I\!K$.

a) Expliquer pourquoi on a nécessairement $I\!K = I\!R$.
b) Montrer que l'équation $r^2 - ar - b = 0$ admet deux solutions conjuguées r_1 et $\bar{r_1}$ dans $\mathbb{C}$.
On note par ρ le module de r_1 et par θ l'argument principal de r_1.
c) Montrer que $(\rho^n \cos(n\theta))_{n\in I\!N}$ et $(\rho^n \sin(n\theta))_{n\in I\!N}$ sont des suites de $E_{a,b}$.
d) Montrer que la famille $((\rho^n \cos(n\theta))_{n\in I\!N}, (\rho^n \sin(n\theta))_{n\in I\!N})$ est une base de $E_{a,b}$.
e) En déduire le terme général d'une suite $(u_n)_{n\in I\!N}$ de $E_{a,b}$ en fonction de u_0, u_1, ρ, θ.
f) Application : Déterminer le terme général de la suite $(u_n)_{n\in I\!N}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1, \quad u_1 = 1 \\ \forall n \in I\!N \quad u_{n+2} = -2u_{n+1} - 4u_n \end{cases}$$

PROBLEME 2

Les parties* B *et* C *sont liées, mais la partie* A *est indépendante du reste du problème.

On rappelle que, si p est un entier naturel non nul, la notation $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ représente l'algèbre des matrices carrées d'ordre p à coefficients réels.

PARTIE A :

Soit p un entier naturel non nul. Une matrice A de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est dite **nilpotente d'indice trois** si elle vérifie $A^2 \neq 0$ et $A^3 = 0$.

Dans toute cette partie, on note A une matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, nilpotente d'indice trois. On note I la matrice-unité d'ordre p.

Pour tout réel t, on note $E(t)$ la matrice

$$E(t) = I + tA + \frac{t^2}{2}A^2 .$$

A.1. Vérifier la relation

$$\forall (s,t) \in \mathbb{R}^2 \qquad E(s)\,E(t) = E(s+t) .$$

A.2. En déduire que $\big(E(t)\big)^n = E(nt)$ pour $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

A.3. Montrer que la matrice $E(t)$ est inversible. Quel est son inverse ?

A.4. Montrer que la famille (I, A, A^2) est libre dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

A.5. En déduire que l'application $E : t \mapsto E(t)$, de $\mathbb{R}$ vers $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, est injective.

A.6. Dans cette question, $p = 3$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Expliciter la matrice $E(t)$ sous la forme d'un tableau matriciel pour $t \in \mathbb{R}$.

PARTIE B :

Dans cette partie, on note $\mathcal{B}_0 = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ appartenant à $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ qui lui est canoniquement associé.

B.1. Montrer que $F = \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2})$ et $G = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2})$ sont deux droites vectorielles, supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$. Préciser un vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ de F, et un vecteur directeur $\overrightarrow{v}$ de G.

B.2. Sans calculs, déterminer la matrice de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ dans la base $\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v})$.

B.3. En déduire qu'il existe une matrice P inversible et une matrice D diagonale (toutes deux carrées d'ordre deux) telles que $A = PDP^{-1}$. Expliciter P, D et P^{-1}.

B.4. Expliciter D^n pour tout n entier naturel. Démontrer la relation $A^n = P\,D^n\,P^{-1}$. En déduire l'expression de A^n sous forme de tableau matriciel.

PARTIE C.

On reprend les notations de la partie **B**.

C.1. En utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange, montrer que, pour tout réel t, on a

$$e^t = \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{t^k}{k!}\right).$$

On pourra admettre le résultat de cette question pour traiter les suivantes.

C.2. Pour tout réel t, pour tout entier naturel n, on note $E_n(t)$ la matrice définie par $E_n(t) = \sum_{k=0}^{n}\frac{t^k}{k!}A^k$. On écrira cette matrice sous la forme $E_n(t) = \begin{pmatrix} a_n(t) & b_n(t) \\ c_n(t) & d_n(t) \end{pmatrix}$.
Expliciter (sous forme de sommes) ses coefficients $a_n(t)$, $b_n(t)$, $c_n(t)$, $d_n(t)$.

C.3. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on note $E(t)$ la matrice $E(t) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix}$, avec $a(t) = \lim_{n\to+\infty} a_n(t)$, $b(t) = \lim_{n\to+\infty} b_n(t)$, etc. Expliciter la matrice $E(t)$.
Réponse partielle : on obtient $a(t) = 3e^{2t} - 2e^t$.

C.4. Montrer qu'il existe deux matrices Q et R (carrées d'ordre deux) telles que

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad E(t) = e^{2t}\,Q + e^t\,R$$

et expliciter Q et R.

C.5. Calculer les matrices Q^2, R^2, QR, RQ. Que peut-on dire des endomorphismes q et r de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associés aux matrices Q et R (*on pourra préciser la réponse en utilisant les droites F et G de la question* **B.1.**) ?

C.6. En déduire que

$$\forall (s,t) \in \mathbb{R}^2 \qquad E(s)\,E(t) = E(s+t)\,.$$

Que dire de $\big(E(t)\big)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$?, de $\big(E(t)\big)^{-1}$?
L'application $E : t \mapsto E(t)$, de $\mathbb{R}$ vers $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, est-elle injective ?

Problème 3

Soient $n \in I\!N$ et $\mathbb{C}_n[X]$, l'espace des polynôûes complexes de degré inférieure ou égal à n. Pour P dans $\mathbb{C}_n[X]$, soit $T_n(P)$ le polynôme $P(X+1)$.
On considère d'autre part, la suite des polynômes de Hilbert, définie par :

$$H_0 = 1 \text{ et } \forall i \in I\!N^*, H_i = \frac{1}{i!}\prod_{k=0}^{i-1}(X-k)$$

A : Inversion d'une matrice.

A.1) Montrer que T_n est un endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$.
A.2) Ecrire la matrice M_n de T_n dans la base $(1, X, \ldots, X^n)$ de $\mathbb{C}_n[X]$.
A.3) Vérifier que M_n est inversible ; expliciter M_n^{-1}.

B : Propriétés de la suite $(H_i)_{i\in I\!N}$.

B.1) Montrer que $(H_i)_{0\le i\le n}$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.
B.2) Si $j \in \mathbb{Z}$ et $i \in I\!N^*$, donner une expression simple de $H_i(j)$ montrant que $H_i(j)$ est dans $\mathbb{Z}$. On distinguera les trois cas : $j < 0$, $0 \le j \le i-1$ et $j \ge i$.

C : Polynômes de $\mathbb{C}_n[X]$ tels que $P(I\!N) \subset \mathbb{Z}$

Soit P dans $\mathbb{C}_n[X]$. On décompose P sur $(H_i)_{0\le i\le n}$ en $P = \sum_{i=0}^{n} a_i H_i$.

C.1) Vérifier l'égalité suivante : $\begin{pmatrix} P(0) \\ \vdots \\ P(n) \end{pmatrix} = {}^tM_n \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

où ${}^tM_n$ est la transposée de la matrice M_n.

C.2) Etablir : $\forall i \in \{0, \ldots, n\}, a_i = \sum_{j=0}^{i} (-1)^{i-j}\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} P(j)$.

Si $i \ge n+1$, que vaut $\sum_{j=0}^{i} (-1)^{i-j}\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} P(j)$?

C.3) Montrer que les trois conditions suivantes sont équivalentes :

1. $\forall i \in \{0, \ldots, n\}, P(i) \in \mathbb{Z}$
2. $\forall i \in \{0, \ldots, n\}, a_i \in \mathbb{Z}$
3. $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$

En particulier les polynômes P de $\mathbb{C}_n[X]$ tels que $P(I\!N) \subset \mathbb{Z}$ sont les combinaisons linéaires à coefficients dans $\mathbb{Z}$ des polynômes de Hilbert.

D. Description des suites de la forme $(P(j))_{j\in I\!N}$ où P est un polynôme.

Soit $(u_j)_{j\in I\!N}$ une suite complexe. Démontrer que les deux conditions suivantes sont équivalentes :

1. il existe $P \in \mathbb{C}_n[X]$ tel que : $\forall j \in I\!N, u_j = P(j)$
2. $\forall i \in I\!N, i \ge n+1 \Rightarrow \sum_{j=0}^{i} (-1)^{i-j}\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} u_j = 0$.