Devoir Libre $n°18$

PSI

MATHEMATIQUES

(rendre le 26 Mars 2010)

L'usage de calculatrices est interdit

Partie 1

Question 1.

On appelle θ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, paire et périodique de période 2π, définie par :

$$\begin{cases} \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \theta(x) = \frac{\pi^2}{4} - x^2 \\ \forall x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right], \theta(x) = \left(x - \frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) \end{cases}$$

1.1. Tracer les graphes des fonctions θ et θ_1, dérivée de la fonction θ.

1.2. Déterminer la série de Fourier associée à la fonction θ_1.
Étudier sa convergence.

Question 2.

En déduire la série de Fourier associée à la fonction θ et celle de Φ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \Phi(x) = \int_0^x \theta(u)\, du.$$

Étudier la convergence de ces séries.

La suite du problème consiste à rechercher les fonctions U de classe $\mathcal{C}^0$ sur $\Omega = [0,\pi] \times \mathbb{R}_+$ et $\mathcal{C}^2$ sur $[0,\pi] \times \mathbb{R}_+^*$ et vérifiant les conditions suivantes :

$$(P) \qquad \begin{cases} \forall (x,t) \in\ [0,\pi] \times \mathbb{R}_+^*, \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x,t) = \dfrac{\partial U}{\partial t}(x,t) \quad (1) \\ \forall t \in \mathbb{R}_+, U(0,t) = U(\pi,t) = 0 \quad (2) \\ \forall x \in [0,\pi], \lim\limits_{t \to +\infty} U(x,t) = 0 \quad (3) \\ \forall x \in [0,\pi], U(x,0) = \Phi(x) \quad (4) \end{cases}$$

Une fonction U vérifiant les quatre relations (1), (2), (3) et (4) est dite solution du problème (P).
Les parties 2 et 3 sont indépendantes.

Partie 2.

On se propose de chercher des solutions de l'équation différentielle (1) sous la forme de fonctions V définies sur Ω par :

$$\forall (x,t) \in \Omega, V(x,t) = g(x).h(t)$$

où g est une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,\pi]$ et h une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$.

Question 1.

1.1. Montrer que si les fonctions g et h sont solutions des équations différentielles :
$$\begin{cases} g''(x) - \mu g(x) = 0 \\ h'(t) - \mu h(t) = 0 \end{cases}$$
où μ est un réel quelconque, alors la fonction $V : (x,t) \mapsto V(x,t) = g(x).h(t)$ vérifie (1).

1.2. Trouver toutes les solutions des équations différentielles précédentes.

1.3. On prend $\mu = -k^2$, $k \in \mathbb{N}^*$. Déterminer une suite de fonctions $(V_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$:

$$\begin{array}{rcl} V_k : \Omega & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto & V_k(x,t) = g_k(x).h_k(t) \end{array}$$

vérifiant (1), (2) et (3).

Question 2.

Soit

$$\begin{array}{rcl} H : \Omega & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto & H(x,t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} d_k \sin(kx) e^{-k^2 t} \end{array}$$

et pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{array}{rcl} R_k : \Omega & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto & R_k(x,t) = \sin(kx) e^{-k^2 t}. \end{array}$$

Il s'agit de déterminer les coefficients $(d_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ pour que la fonction H soit solution du problème (P).

2.1. À l'aide de la relation (4), déterminer les coefficients $(d_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$.

2.2. Montrer qu'alors, la fonction H est deux fois dérivable par rapport à x et une fois par rapport à t avec :
$$\forall (x,t) \in [0,\pi] \times \mathbb{R}_+^*, \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} d_k \frac{\partial^2 R_k}{\partial x^2}(x,t)$$
et
$$\forall (x,t) \in [0,\pi] \times \mathbb{R}_+^*, \frac{\partial H}{\partial t}(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} d_k \frac{\partial R_k}{\partial t}(x,t).$$

2.3. Trouver une solution du problème (P).

Partie 3

Question 1.

On note $E = \left\{\omega, \mathcal{C}^0 \text{ sur } \Omega \text{ et } \mathcal{C}^2 \text{ sur } [0,\pi] \times \mathbb{R}_+^* \text{ telle que } \omega \text{ vérifie } (1), (2), (3) \text{ et } \forall x \in [0,\pi], \omega(x,0) = 0\right\}.$

1.1. Montrer que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

1.2. Prouver que si u et v sont solutions du problème (P), alors $u - v \in E$.

Question 2.

Soit $\omega \in E$.

2.1. Calculer, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, l'intégrale : $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\partial}{\partial x}\left[\omega(x,t)\frac{\partial \omega}{\partial x}(x,t)\right] dx$.

2.2. En déduire que : $\forall t \in \mathbb{R}_+, \displaystyle\int_0^\pi \left(\frac{\partial \omega}{\partial x}(x,t)\right)^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^\pi \frac{\partial(\omega^2)}{\partial t}(x,t)\,dx = 0$.

2.3. On note

$$\begin{array}{rcl} \psi : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ T & \mapsto & \psi(T) = \displaystyle\int_0^T \left(\int_0^\pi \left(\frac{\partial \omega}{\partial x}(x,t)\right)^2 dx\right) dt + \int_0^T \left(\int_0^\pi \left(\omega(x,t)\frac{\partial \omega}{\partial x}(x,t)\right) dx\right) dt \end{array}$$

Montrer que ψ est nulle sur $\mathbb{R}_+$. (On pourra, pour $T \in \mathbb{R}_+$, calculer $\psi'(T)$).

En déduire que $\forall T \in \mathbb{R}_+, \displaystyle\int_0^\pi \omega^2(x,T)\,dx = 0$.

2.4. Démontrer que E ne contient que la fonction nulle.

2.5. Combien le problème (P) possède-t-il de solutions ?