Devoir Libre $n°2$
PSI
MATHEMATIQUES
(à rendre le 18 septembre 2009)

Exercice 1 : Soit $E = I\!K_3[X]$, $F = \{P \in E/P(0) = P(1) = P(2) = 0\}$,
$G = \{P \in E/P(3) = P(1) = P(2) = 0\}$,$H = \{P \in E/P(-X) = P(X)\}$.
1. Montrer que $F \oplus G = \{P \in E/P(1) = P(2) = 0\}$.
2. Montrer que $F \oplus G \oplus H = E$.

Exercice 2 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(I\!K)$.

Les deux questions sont indépendantes

1) On suppose que $rg(A) = 1$.

a) Etablir l'existence de deux matrices colonnes U et C telles que $A = U{}^tC$.

b) En déduire$A^2 = Tr(A)A$.

2) Etablir $tr({}^tAA) = 0 \Longleftrightarrow A = 0$.

Problème : Autour des noyaux et images itérés

Soit E un $I\!K$-e.v de dimension finie $n \geq 1$ et f est un endomorphisme fixé de E.

Pour tout $k \in I\!N$, $N_k = \mathrm{Ker}(f^k), n_k = \dim(N_k)$ et $I_k = \mathrm{Im}(f^k)$.

Pour un endomorphisme g d'un $I\!K$-e.v F, on dit que g est nilpotent d'indice p(où $p \in I\!N$), lorsque :

$g^p = 0$ et $g^{p-1} \neq 0$.

1. Montrer que, pour l'inclusion, $(N_k)_k$ et $(I_k)_k$ sont respectivement croissante et décroissante.

2. a) Montrer que $\{k \in I\!N/0 \leq k \leq n$ et $N_{k+1} = N_k\}$ est non vide. En déduire que cet ensemble admet un plus petit élément qu'on note p.

b) Montrer : $\forall k \in I\!N,\ k \geq p \Longrightarrow N_k = N_p$.

c) En déduire : $\forall k \in I\!N,\ k < p \Longrightarrow I_k \neq I_{k+1}$ et $k \geq p \Longrightarrow I_k = I_p$.

d) Comparer les rangs de f^n et f^{n+1}.

3. a) Montrer que $E = N_p \oplus I_p$

b) En déduire que f induit un automorphisme de I_p (c'est-à-dire que l'application $\tilde{f} : I_p \to I_p, x \longmapsto f(x)$ est un automorphisme).

c) Montrer également que f induit un endomorphisme nilpotent de N_p d'indice p .

4. **On suppose ici que f est nilpotent d'indice p_0 :**

a) Justifier qu'il existe $x \in E$ tel que $(x, f(x), f^2(x), \cdots, f^{p_0-1}(x))$ est libre.

b) En déduire que $p_0 \leq n$.

c) Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle le matrice est de la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & L \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & & \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \vdots & \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & \vdots & A \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \end{pmatrix}$$

d) Montrer que $p \leq rg(f) + 1$.
e) Montrer que : $\forall k, \dim(\ker f^k) \leq k \dim(\ker f)$.
f) Montrer que $p \geq \dfrac{n}{n - rg(f)}$.

5. On se propose de montrer : $n_1 - n_0 \geq n_2 - n_1 \geq \cdots \geq n_p - n_{p-1} \geq 1$.
a) Pour tout $k \in I\!N$, montrer que $f(N_{k+1})$ est un sous espace de N_k.
b) En considérant le théorème du rang sur $g_0 : N_2 \rightarrow N_1$ définie par $g_0(x) = f(x)$, montrer que $2n_1 \geq n_2$.
c) Soit $k \in I\!N^*$, on considère un supplémentaire V_{k+1} de N_{k+1} dans N_{k+2} et l'application $g_k : N_{k+2} \rightarrow N_{k+1}$ définie par $g_k(x) = f(x)$.
(i) Montrer que g_k induit un isomorphisme entre V_{k+1} et $W_k = f(V_{k+1})$.
(ii) Quelle relation a-t-on entre $\dim V_{k+1}$ et $\dim W_k$.
(iii) Montrer que $N_k + W_k$ est directe.
d) En utilisant $N_{k+2} = N_{k+1} \oplus V_{k+1}$ puis dim $N_k \oplus W_k$, montrer que$n_{k+1} - n_k \geq n_{k+2} - n_{k+1}$ et conclure.

6. **On suppose ici f nilpotent**.
a)(i) Justifier que : $\forall 1 \leq k \leq p,\ n_k = n_1 + \sum\limits_{i=1}^{k-1} (n_{i+1} - n_i)$.
(ii) Montrer que $\forall 1 \leq k \leq p,\ n_1 + k - 1 \leq n_k \leq k\, n_1$.
(iii) Que vaut n_p ?
b) En déduire :

$$n_1 = 1 \Longleftrightarrow p = n \Longleftrightarrow f^{n-1} \neq 0 = f^n \Longleftrightarrow (\forall 1 \leq k \leq p, n_k = k)$$

c) On suppose $n_1 = 1$, justifier l'existence d'une base de E dans laquelle la matrice de f est :

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

d) On suppose encore $n_1 = 1$ et on note $(e_1, \cdots, e_n)$ une base dans laquelle la matrice précédente est matrice de f.

Soit $\mathcal{C} = \{g \in \mathcal{L}(E) / f \circ g = g \circ f\}$ appelé le commutant de f.

Si $g \in \mathcal{C}$, on pose $g(e_1) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \, e_k$ avec $\alpha_k \in I\!K$.

(i) Montrer que $g = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f^{k-1}$.

(ii) En déduire $g \in \mathcal{C} \iff \exists! P \in I\!K_{n-1}[X]$, tel que $g = P(f)$.

(iii) Quelle structure algébrique possède $\mathcal{C}$?.

7. En s'aidant de ce qui précède, montrer qu'il n'existe pas de matrice $A \in \mathcal{M}_3(I\!K)$ telle que

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$