

**Devoir Surveillé n°1**  
**PSI**  
**MATHEMATIQUES**  
(Samedi 12 Septembre 2009)  
(durée : 4 heures)

**Exercice I :** (Ecole de Commerce EDHEC 1994) :  
 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  désigne l'espace vectoriel réel des suites à coefficients réels.  
On étudie l'ensemble suivant :

$$\mathcal{E} = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = \frac{3}{2}u_{n+2} - \frac{3}{4}u_{n+1} + \frac{1}{8}u_n\}$$

- 1) Montrer que  $\mathcal{E}$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.
- 2) Etablir qu'il est de dimension 3. (On pourra éventuellement considérer l'application  $\varphi$  de  $\mathcal{E}$  dans  $\mathbb{R}^3$  définie par  $\varphi((u_n)_n) = (u_0, u_1, u_2)$ .)
- 3) Montrer que si l'on pose  $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{1}{2^n}, b_n = \frac{n}{2^n}, c_n = \frac{n^2}{2^n}$ , les trois suites  $(a_n)_n, (b_n)_n, (c_n)_n$  forment une base de  $\mathcal{E}$ .
- 4) Donner l'expression du terme général d'une suite  $(u_n)_n$  de  $\mathcal{E}$  en fonction de ses trois premiers termes  $u_0, u_1$  et  $u_2$ .

**Problème I :** (Extrait du concours commun des Petites Mines 2008)

Dans tout ce problème,  $n$  désigne un entier non nul,  $a$  et  $b$  sont deux nombres réels.  
La notation  $\mathbb{R}_n[X]$  désigne le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des polynômes à coefficients dans  $\mathbb{R}$  et ayant un degré inférieur ou égal à  $n$ .

Pour tout  $P \in \mathbb{R}_n[X]$ , on pose :

$$\varphi_n(P) = (X - a)(X - b)P' - n\left(X - \frac{a+b}{2}\right)P$$

**Partie A : Etude de  $\varphi_1$**

Dans toute cette partie, on suppose que  $n = 1$ . On pose donc :

$$\forall P \in \mathbb{R}_1[X], \varphi_1(P) = (X - a)(X - b)P' - \left(X - \frac{a+b}{2}\right)P$$

1. Démontrer que  $\varphi_1$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_1[X]$ .
2. Soit  $\mathcal{B}_1 = (1, X)$  la base canonique de  $\mathbb{R}_1[X]$ . Déterminer  $M_1 = \text{Mat}_{\mathcal{B}_1}(\varphi_1)$ .
3. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur  $a$  et  $b$  pour que  $\varphi_1$  soit bijective.

4. On suppose, dans cette question seulement, que  $a \neq b$ .
  - (a). Démontrer que la famille  $\mathcal{B} = \{X - a, X - b\}$  est une base de  $\mathbb{R}_1[X]$ .
  - (b). Calculer  $\varphi_1(X - a)$  et  $\varphi_1(X - b)$  puis déduire  $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi_1)$ .
  - (c). Déterminer la matrice de passage de la base  $\mathcal{B}$  à la base  $\mathcal{B}_1$ , notée  $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}_1}$ . Déterminer de même la matrice de passage de la base  $\mathcal{B}_1$  à la base  $\mathcal{B}$ , notée  $P_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}}$ .
  - (d). Donner, sans démonstration, une égalité reliant les matrices  $M, M_1, P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}_1}$  et  $P_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}}$ .
  - (e). Soit  $p \in \mathbb{N}$ . Calculer  $M^p$  puis en déduire, grâce à la question 4.(d), une expression de  $M_1^p$  (on donnera l'expression de chacun des coefficients de cette matrice).
5. On s'intéresse dans cette question à l'ensemble  $\Gamma = \{\alpha I_2 + \beta M_1 + \gamma M_1^2 + \delta M_1^3, (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}\}$ .
  - (a). Démontrer que  $\Gamma$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .
  - (b). Prouver que les matrices  $M_1^2$  et  $M_1^3$  sont des combinaisons linéaires de  $M_1$  et  $I_2$ .
  - (c). Déterminer une base de  $\Gamma$ .
6. On suppose dans cette question que  $a = 4$  et  $b = 2$ . En utilisant les résultats de la question 5.(b), déterminer l'application  $\varphi_1^2$ . En déduire la nature de  $\varphi_1$  et préciser ses éléments caractéristiques (on donnera une base de chacun des deux espaces vectoriels concernés).

**Partie B : Quelques généralités sur  $\varphi_n$**

7. Démontrer que  $\varphi_n$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$ .
8. On se propose dans cette question de déterminer  $\text{Ker}(\varphi_n)$ .  
On pose  $\alpha = \max(a, b)$  et on considère l'intervalle  $I = ]\alpha, +\infty[$ .
  - (a). Démontrer que la fonction  $f : x \mapsto \frac{2x - (a+b)}{x^2 - (a+b)x + ab}$  est continue sur  $I$ .
  - (b). Déterminer une primitive  $F$  de la fonction  $f$  sur  $I$ .
  - (c). Résoudre sur l'intervalle  $I$  l'équation différentielle (E) :
$$y' - \frac{nx - n\frac{a+b}{2}}{(x-a)(x-b)}y = 0$$
  - (d). On suppose que  $n$  est pair et on écrit  $n = 2p$  avec  $p \in \mathbb{N}^*$ . Déduire de la question 8.(c) une base de l'espace vectoriel  $\text{Ker}(\varphi_{2p})$ .
  - (e). On suppose maintenant que  $n$  est impair et on écrit  $n = 2p + 1$  avec  $p \in \mathbb{N}$ . Déduire de la question 8.(c) une base de l'espace vectoriel  $\text{Ker}(\varphi_{2p+1})$  (On pourra discuter suivant les valeurs de  $a$  et  $b$ ).

**Problème II : (Extrait du concours commun des Petites Mines 2000)**

**Notations et objectifs ;**

- Soit  $n$  un entier,  $n \geq 2$ ; on note  $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des matrices carrées d'ordre  $n$  à coefficients réels, et  $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ , le  $\mathbb{R}$  espace vectoriel des applications linéaires de  $E$  dans  $\mathbb{R}$ .

On rappelle que :  $\dim(E) = \dim(E^*)$ .

Les éléments de  $E$  sont notés  $M = (m_{ij})$ , la matrice élémentaire  $E_{ij}$  est la matrice de  $E$  dont les coefficients sont tous nuls à l'exception de celui qui se trouve sur la  $i$ -ème ligne et sur la  $j$ -ème colonne, qui vaut 1.

Lorsque  $A$  et  $B$  sont des éléments de  $E$ , on note  $A \cdot B$  leur produit.

Si  $M \in E$ , on note  $\text{vect}(M)$  le sous-espace vectoriel engendré par  $M$

- L'objectif du problème est de montrer que chaque hyperplan vectoriel de  $E$  possède au moins une matrice inversible.
- Si  $M = (m_{ij}) \in E$ , on note  $T(M)$  le réel  $\sum_{k=1}^n m_{kk}$ .

On définit ainsi une application  $T$  de  $E$  vers  $\mathbb{R} : M \mapsto T(M)$ .

A chaque matrice  $U$  de  $E$ , on associe :

- L'application  $T_U$  de  $E$  vers  $\mathbb{R} : M \mapsto T_U(M) = T(U \cdot M)$ .
- L'ensemble  $H_U = \{M \in E \mid T(U \cdot M) = 0\}$ .

**PARTIE I : Généralités, exemples**

1. Quelques propriétés.
  - a. Montrer que  $T$  est une application linéaire.
  - b. Pour  $U \in E$ , prouver que l'application  $T_U$  est dans  $E^*$ .
  - c. Soit  $U \in E$ ; reconnaître  $\text{Ker } T_U$ , et montrer que  $H_U$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .
2. Dans cette question seulement, on prend  $n = 2$ , et on pose  $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .
  - a. Ecrire les quatre matrices élémentaires  $E_{ij}$ ; que peut-on dire de la famille  $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$  de  $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  ?
  - b. Montrer que  $H_U$  est l'ensemble des matrices de  $E$  dont la somme des quatre coefficients vaut 0.
  - c. Trouver une matrice  $M$  de  $E$  telle que  $T(U \cdot M) \neq 0$ , et en déduire la dimension de  $\text{Im } T_U$  puis la dimension de  $H_U$ .
  - d. Montrer que  $H_U$  possède une matrice inversible.

La partie III propose une généralisation de ce résultat.

**PARTIE II : Quelques résultats utiles pour la suite**

1. Soit  $A = (a_{ij})$  et  $B = (b_{ij})$  des éléments de  $E$ .
  - a. Montrer que  $T(A \cdot B) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ij}$ .
  - b. En déduire les identités suivantes :

$$(I_1) \quad T(A \cdot B) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ij}.$$

$$(I_2) \quad T(B \cdot A) = T(A \cdot B)$$

2. Soit  $U$  dans  $E$ .
  - a. Si  $U$  est la matrice nulle, déterminer  $\dim H_U$ .
  - b. Si  $U$  n'est pas la matrice nulle, montrer que l'on peut trouver un couple d'entiers  $(i_0, j_0)$  tel que  $T_U(E_{i_0 j_0}) \neq 0$ . En déduire  $\dim H_U$ .
3. Pour  $(i, j) \in \{1, 2, \dots, n\}^2$ , on note  $T_{ij} = T_{E_{ij}}$ .
  - a. Les indices  $k$  et  $l$  étant fixés, calculer  $T_{ij}(E_{kl})$  en utilisant  $(I_1)$ .
  - b. En déduire que les  $n^2$  éléments  $T_{ij}$  de  $E^*$  permettent de définir une base de  $E^*$ .
4. Montrer que l'application  $\varphi$  de  $E$  vers  $E^* : U \mapsto \varphi(U) = T_U$  est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
5. On considère un hyperplan vectoriel  $H$  de  $E$ .
  - a. Quelle est sa dimension ?
  - b. Soit  $A$  une matrice non nulle de  $E$  qui n'appartient pas à  $H$ , montrer que :  $E = H \oplus \text{vect}(A)$ .
  - c. Construire alors un élément  $l$  de  $E^*$  tel que  $H = \text{Ker } l$ .
  - d. Prouver l'existence d'un élément  $U$  de  $E$  tel que  $H = H_U$ .

**PARTIE III : Le résultat général**

Pour  $1 \leq r \leq n$ , on note  $R_r = \sum_{i=1}^r E_{ii}$ .

1. Soit  $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$  c'est-à-dire  $P = (p_{ij})$  avec  $\begin{cases} p_{i+1 i} = 1, & 1 \leq i \leq n-1 \\ p_{1 n} = 1 \\ p_{ij} = 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$ 
  - a. Montrer que  $P$  est inversible.
  - b. Prouver que  $P$  appartient à l'hyperplan  $H_{R_r}$ .
2. En déduire que chaque hyperplan vectoriel  $H$  de  $E$  possède au moins une matrice inversible. *Indication : lorsque  $H = H_U$ , avec  $U$  de rang  $r$ , on rappelle l'existence de matrices  $S_1$  et  $S_2$  inversibles telles que  $S_1 \cdot U \cdot S_2 = R_r$ .*