JU20

e3a

Concours ENSAM - ESTP - ARCHIMEDE

Épreuve de Mathématiques A PSI

Durée 3 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

Applications simples du cours

Rappels.

Soit $I = [a, b]$ (avec $a < b$) un intervalle de $\mathbb{R}$ et U un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

On considère : $V : (x,y) \in U \mapsto \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix}$ un champ de vecteurs et γ un arc orienté du plan de paramétrage :

$t \in I \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, de classe C^1 par morceaux sur I, parcouru dans le sens des t croissants.

On rappelle que la circulation de V le long de γ, notée $\int_\gamma V$ se calcule par la formule :

$$\int_\gamma V = \int_\gamma \left(P(x,y)dx + Q(x,y)dy \right)$$

On suppose P et Q de classe C^1 sur U. L'arc γ est supposé fermé, sans point double et parcouru dans le sens trigonométrique. Il délimite un domaine G d'un seul tenant, inclus dans U.

On rappelle la formule de Green-Riemann :

$$\int_\gamma V = \iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) \right) dxdy$$

Question 1.

Dans cette question uniquement, on prend $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y \geqslant x^2 \text{ et } y^2 \leqslant x\}$ et pour γ l'arc frontière délimitant ce domaine, parcouru dans le sens trigonométrique.

1.1. Représenter le domaine G et γ.

1.2. Calculer directement, en paramétrant l'arc : $\int_\gamma V$ avec $P : (x,y) \mapsto 2xy - x^2$ et $Q : (x,y) \mapsto x + y^2$.

1.3. Retrouver le résultat précédent en utilisant la formule de Green-Riemann.

Question 2.

On suppose que les deux fonctions P et Q vérifient : pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)$.

2.1. Que vaut : $\int_\gamma V$?

2.2. Donner un exemple de champ de vecteurs V, non identiquement nul, et vérifiant la propriété :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial P}{\partial y}(x,y).$$

Question 3.

3.1. Démontrer que les intégrales curvilignes suivantes : $A_1 = \int_\gamma x\,dy$, $A_2 = -\int_\gamma y\,dx$ et $A_3 = \frac{1}{2}\int_\gamma (x\,dy - y\,dx)$ sont égales.

Interpréter géométriquement le résultat obtenu.

3.2. Représenter graphiquement l'arc orienté γ d'équations paramétriques : $t \in [-\pi, \pi] \mapsto \begin{pmatrix} x(t) = \cos^3 t \\ y(t) = \sin^3 t \end{pmatrix}$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ direct.

On précisera les tangentes aux points singuliers.

3.3. Déterminer l'aire délimitée par la courbe γ.

Problème

Préliminaires

1. Illustrer graphiquement la double inégalité : $\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\frac{2}{\pi} t \leqslant \sin t \leqslant t$.

2. On veut montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$ est convergente.

On pose alors, pour tout $t > 0$, $\varphi(t) = \frac{\sin t}{t}$.

2.1. Vérifier que φ est prolongeable par continuité sur l'intervalle $[0, 1]$.

2.2. Pour tout $x > 1$, on définit $\phi : x \mapsto \phi(x) = \int_1^x \varphi(t)\, dt$.

Montrer que l'on a : $\forall x > 1$, $\phi(x) = \cos 1 - \frac{\cos x}{x} - \int_1^x \frac{\cos t}{t^2}\, dt$.

2.3. Prouver que $\phi(x)$ tend vers une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$.

2.4. Déduire de ces résultats que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$ est convergente.

Partie 1 : Une première façon de calculer $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$

Soient les deux fonctions :

$$P : (x,y) \mapsto P(x,y) = \frac{e^{-y}}{x^2 + y^2}\left[x \sin x - y \cos x \right]$$
$$Q : (x,y) \mapsto Q(x,y) = \frac{e^{-y}}{x^2 + y^2}\left[x \cos x + y \sin x \right]$$

et V le champ de vecteurs : $(x,y) \mapsto \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix}$

Question 1.

Justifier le fait que P et Q sont deux fonctions de classe C^1 sur tout domaine U de $\mathbb{R}^2$ ne contenant pas l'origine.

Question 2.

Soit γ un arc fermé sans point double, n'entourant pas l'origine et parcouru dans le sens trigonométrique.

Démontrer que : $\int_\gamma V = 0$.

Question 3.

On considère Γ l'arc de cercle de rayon $\rho > 0$ paramétré par : $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \mapsto \begin{pmatrix} x(\theta) = \rho\cos\theta \\ y(\theta) = \rho\sin\theta \end{pmatrix}$ et on note A_ρ l'intégrale :

$$A_\rho = \int_\Gamma \Big(P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy\Big).$$

3.1. Montrer que : $A_\rho = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\rho\sin\theta}\cos(\rho\cos\theta)\,d\theta$.

3.2. Calculer : $\lim\limits_{\rho\to 0^+} A_\rho$.

3.3. Montrer que : $\lim\limits_{\rho\to+\infty} A_\rho = 0$.

On pourra, par exemple, utiliser les préliminaires.

Question 4.

Soient r et R deux réels tels que : $0 < r < R$. On considère l'arc γ constitué par :

- γ_1 : le segment $[A_1, A_2]$ où $A_1 = (r,0)$ et $A_2 = (R,0)$,
- γ_2 : le quart de cercle de centre O et de rayon R reliant A_2 à $A_3 = (0,R)$,
- γ_3 : le segment $[A_3, A_4]$ où $A_4 = (0,r)$,
- γ_4 : le quart de cercle de centre O et de rayon r reliant A_4 à A_1.

4.1. Représenter graphiquement l'arc orienté γ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ direct.

4.2. Montrer que : $\int_{\gamma_1} V = \int_r^R \frac{\sin x}{x}\,dx$.

4.3. Vérifier que : $\int_{\gamma_3} V = 0$.

4.4. En utilisant les résultats précédents, déterminer la valeur de $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$.

Partie 2 : Une deuxième façon de calculer $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t\,\sin(2nt)}{\sin t}\,dt$ et $v_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2nt)}{t}\,dt$.

Question 1.

1.1. Vérifier que u_n et v_n existent pour toute valeur de l'entier naturel n non nul.

1.2. En calculant $u_{n+1} - u_n$, montrer que u_n est indépendante de n et donner sa valeur.

Question 2.

Soit h une fonction de classe C^1 sur un segment $[\alpha, \beta]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On pose, pour tout $m \in \mathbb{N}$, $H_m = \int_\alpha^\beta h(t)\,e^{imt}\,dt$.

Montrer, en utilisant une intégration par parties que : $\lim\limits_{m\to+\infty} H_m = 0$.

Ce résultat est connu sous le nom de Lemme de Riemann-Lebesgue.

Question 3.

Montrer que la fonction $h : t \mapsto h(t) = \frac{1}{t} - \frac{\cos t}{\sin t}$ est prolongeable en une fonction de classe C^1 sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Question 4.

4.1. Calculer : $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n - u_n)$.

4.2. En déduire la valeur de $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$.

Partie 3 : Une troisième façon de calculer $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$

Soit $u \in \mathbb{R}_+^*$. On note $\Delta = [0,u] \times [0,u]$ et $J = \iint_\Delta (\sin x)\,e^{-xy}\,dx dy$

Question 1.

Donner une primitive de la fonction $x \mapsto (\sin x)\,e^{-\alpha x}$ où $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

Question 2.

En utilisant l'intégrale J, montrer que : $\int_0^u \frac{\sin x}{x}\left[1 - e^{-xu}\right]dx = \int_0^u \frac{1 - e^{-yu}(\cos u + y\sin u)}{1+y^2}\,dy$.

Question 3.

On note alors : $K_1 = \int_0^u e^{-xu}\frac{\sin x}{x}\,dx$ et $K_2 = \int_0^u \frac{y\,\sin u + \cos u}{1+y^2}\,e^{-yu}\,dy$.

3.1. Prouver que : $\lim\limits_{u\to+\infty} K_1 = 0$.

3.2. En utilisant une majoration, déterminer : $\lim\limits_{u\to+\infty} K_2$.

3.3. Retrouver alors la valeur de $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$.

Question 4.

4.1. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx$ est convergente.

4.2. En utilisant le résultat de la question 3.3. calculer la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx$.

Fin du problème.