**PSI** **Mai 2010**
**MATHEMATIQUES**

**Préparation à l'oral**

**Planche 1** : (CCP 09)

**Exercice 1** :

Soit $E = \boldsymbol{R}^3$ et $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ les formes linéaires sur $E$ définies par : $\forall x = (x_1, x_2, x_3) \in E, \varphi_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 2x_2 - x_3, \varphi_2(x_1, x_2, x_3) = x_2 - x_3, \varphi_3(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 2x_2$.

Montrer $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est une base de $E^*$ et déterminer sa base antéduale.

**Exercice 2** :

Soit $n I\!N^*$.

1) L'application $t \to \sqrt{t}e^{-nt}$ est-elle intégrable sur $\boldsymbol{R}_+$ ?

2) Calculer $\int_0^{+\infty} \sqrt{t}e^{-nt}dt$ sachant que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

3) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{e^t - 1}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$

**Planche 2** : (CCP 09)

**Exercice 1** :

Montrer que, si $C \in \mathcal{M}_n(\boldsymbol{R})$, vérifie : $\forall X \in \mathcal{M}_n(\boldsymbol{R}), det(C + X) = det(X)$, alors elle est nulle (on pourra chercher le rang de $C$).

Montrer que, si $A$ et $B$ de $\mathcal{M}_n(\boldsymbol{R})$, vérifient : $\forall X \in \mathcal{M}_n(\boldsymbol{R}), det(A+X) = det(B+X)$, alors $A = B$.

**Exercice 2** :

Montrer que la suite réelle $(x_n)_n$ définie par $x_0 \in [a, b]$ et $\forall n \in t, x_{n+1} = \frac{1}{2}(f(x_n) + x_n)$ où $f$ est contractante de $[a, b]$ dans $[a, b]$, converge vers un point fixe de $f$.

**Planche 3** : (CCP 09)

**Exercice 1** : Pour $n \in I\!N^*$, On pose $H(n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}$.

1. Montrer que $H(n) = ln(n) + \gamma + o(1)$.

2. En déduire convergence et somme de $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(2n+1)n}$.

**Exercice 2** :

1) Soit $(x_1, \cdots, x_n)$ n réels distincts deux à deux.

Calculer le déterminant de la matrice $(x_i^{j-1})_{1\leq i,j\leq n}$.

2) Soient $P$ un polynôme de degré $n$ et $(a_0, \cdots, a_n)$ des scalaires deux à deux distincts. Montrer que $(P(X + a_i))_{0\leq i\leq n}$ est une base de $I\!K_n[X]$.

3) Calculer, pour $(a, b, c, d) \in I\!K^4$, :

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^4 \\ 1 & b & b^2 & b^4 \\ 1 & c & c^2 & c^4 \\ 1 & d & d^2 & d^4 \end{vmatrix}.$$

**Planche 4** :

**Exercice 1** :(CCP)
Etant donné $(a,b) \neq (0,0)$, calculer le déterminant $D_n$ de $M_n = (m_{ij})_{ij} \in \mathcal{M}_n(I\!K)$ tel que :

$$\begin{cases} m_{ij} = a+b & \text{si} \quad i=j \\ m_{ij} = ab & \text{si} \quad j=i+1 \\ m_{ij} = 1 & \text{si} \quad i=j+1 \\ m_{ij} = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

**Exercice 2** :(IIE)

1. Montrer que la suite de terme général : $u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2nx) \tan \frac{x}{2} dx$ tend vers 0.
2. Trouver $f$ et $g$ telles que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)\cos((2n+1)x)dx$.

Etablir la convergence de $\sum u_n$ et calculer sa somme.

**Planche 5** :(ENSAM)

**Exercice 1** :
Soit $E$ un $\boldsymbol{R}$ espace vectoriel de dimension $n$. On suppose qu'il existe $f \in \mathcal{L}(E)$ et $g \in \mathcal{L}(E)$ telles que $\forall a \in \boldsymbol{R}^*, f \circ g - g \circ f = af$.
Calculer $f^k \circ g - g \circ f^k$ pour $k \in I\!N^*$.
Montrer que $f$ est nilpotente.

**Exercice 2** : Résoudre $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (3n+1)^2 x^n = 0$.

**Planche 6** :

**Exercice 1** : (TPE) Pour $(a,b,c) \in I\!N^3$ avec $a \neq b$ et $c \neq 0$. On suppose que $P(X) = (X-a)(X-b)(X^2+X+c)$ annule $A \in \mathcal{M}_n(I\!K)$.
Montrer que $tr(A) \in \mathbb{Z}$ et $det(A) \geq 0$.

**Exercice 2** : (IIE) Pour $n \in I\!N$, justifier que $I_n(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(x^2+t^2)^n}$ est définie pour $x > 0$. Montrer que $I_n$ est $C_1$ et exprimer sa dérivée en fonction de $I_{n+1}$. Exprimer $I_n$.

**Planche 7** :(CCP)

**Exercice 1** : Soit $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ une famille de $n$ vecteurs unitaires d'un espace préhilbertien $E$ telle que : $\forall x \in E, \|x\|^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (< x, e_i >)^2$.
Montrer que $(e_i)_i$ est une b.o.n de $E$.

**Exercice 2** : Développement en série entière au voisinage de 0 de $f$ définie par $f(x) = \ln(x^2 - 5x + 6)$.

**Exercice 3** : Trouver $M \in \mathcal{M}_n(\boldsymbol{R})$ telle que $M^3 = M^2$ et $tr(M) = n$.

**Planche 8** : (CCP)

**Exercice 1** : Trouver le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ avec $a_n = \dfrac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n} k}$.

Calculer sa somme.

**Exercice 2** : On note $\Delta$ la tangente au sommet $S$ d'une parabole de foyer $F$ et $M$ un point de $\Delta$.

Montrer qu'une droite $D$ passant par $M$ est tangente à la parabole ssi $FM$ est perpendiculaire à $D$.

**Planche 9** : (CCP)

**Exercice 1** : Reconnaître la courbe d'équation $x^2 - 2x + y^2 = 0$ et calculer $\int\int_D \sqrt{2x} dxdy$ où $D = \{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2, x^2 - 2x + y^2 \leq 0, y \geq 0\}$.

**Exercice 2** : Soit

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_0 \end{pmatrix}$$

deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Calculer $J^k, 1 \leq k \leq n-1$ et $J^n$ (on pourra considérer les vecteurs colonnes). Montrer que $J$ est diagonalisable et déterminer une base $B$ de vecteurs propres de $J$.

Montrer que $A$ est diagonalisable dans $B$.

**Planche 10** :(CCP)

**Exercice 1** :

1. Tracé de la strophoïde d'équation $\rho = a\dfrac{\cos(2\theta)}{\cos(\theta)}$.
2. Aire de la boucle.

**Exercice 2** : Résoudre sur $\boldsymbol{R}$, $(x + 1)y'' - y' - xy = e^{-x}$ (On remarquera que $e^x$ est solution de l'équation homogène).

**Planche 11** :

**Exercice 1** : Déterminer toutes les fonctions $f : \boldsymbol{R}^* \times \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ de classe $C^1$ vérifiant $x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$.(on pourra poser $u = x$ et $v = \dfrac{y}{x}$.

**Exercice 2** : Soit $E = \boldsymbol{R}^3$ muni de sa base canonique euclidienne. Déterminer la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale $p$ sur la droite $(D)$ d'équation $x = \frac{y}{2} = \frac{z}{2}$.
Donner la distance du point $A(3,0,-1)$ à $(D)$ ?

$p$ est-il diagonalisable ? inversible ?

**Planche 12** :

**Exercice 1** : Folium de Descartes

1. Proposer une paramétrisation de la courbe d'équation $x^3 + y^3 - 3axy = 0$.
2. Tracer cette courbe.
3. Donner l'aire limitée par la boucle de cette courbe.
4. A partir de l'équation cartésienne de la courbe, donner une équation cartésienne de la tangente en tout point de la courbe autre que 0.

**Exercice 2** : Montrer que $f(x) = \int_0^\pi \cos(x\cos(t))dt$ est $C^\infty$ sur $\boldsymbol{R}$ et calculer $xf''(x) + f'(x) + xf(x)$. $f$ est-elle développable en série entière ?

**Planche 13** : (CCP)

**Exercice 1** : Soit $E$ un espace euclidien, soit $A$ un s.e.v de $E$. Montrer que $E = A \oplus A^\perp$.

**Exercice 2** : Soit $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}, t \longmapsto \frac{t}{2\pi} - E\left(\frac{t}{2\pi}\right) - \frac{1}{2}$.

Montrer l'existence de la série de Fourier de $f$. La déterminer. Calculer les sommes $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

**Planche 14** : (CCP)

**Exercice 1** :Montrer que la forme différentielle $\omega = (x^2 + y^2 - 1)dx - 2xydy$ n'est pas exacte.

Déterminer une fonction $f$ de $\boldsymbol{R}$ dans $\boldsymbol{R}$ telle que la forme différentielle $\omega' = f(x^2 - y^2)w$ soit exacte et déterminer ses primitives sur $\boldsymbol{R}^2$.

**Exercice 2** : Trouver les matrices $M \in \mathcal{M}_n(\boldsymbol{R})$ telles que

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$