Préparation à l'oral : Centrale

I) Convergence de $\sum \frac{R(n)}{n(n+1)}$ où $R(n)$ est le reste de la division euclidienne de n par 5.

Exprimer $S_{5n} = \sum_{k=1}^{5n} \frac{R(k)}{k(k+1)}$ en fonction de $H(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et en déduire la somme de $\sum \frac{R(n)}{n(n+1)}$. (Utiliser $H(n) = ln(n) + \gamma + o(1)$).

II) a) Montrer que, pour tout $x \in [0, +\infty[$, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-xt}}{t} \sin(t)dt$ converge ; on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-xt}}{t} \sin(t)dt$.

b) Montrer que f est C^1 sur $]0, +\infty[$. Calculer $f'(x)$.

c) On note $A : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\forall t \in [0, +\infty[, A(t) = \begin{cases} \dfrac{1 - e^{-t}}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

Montrer que A est continue sur $\mathbb{R}^*$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que : $A' \leq 0$.

d) En déduire $\forall x > 0, |f(x)| \leq 2x$.

e) En déduire : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}$.

III) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, montrer que $rg \begin{pmatrix} A & I_n \\ 0 & A \end{pmatrix} = rg(A) + n - dim(ImA \cap Ker(A))$.

IV) Calcul $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(\cos(\frac{x}{n})\right)^{n^2} dx$.

V) $A = \begin{pmatrix} -8 & 1 & 5 \\ 2 & -3 & -1 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ? ${}^tA$ l'est-elle ?

Trouver les droites stables par l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$ associé à A.

Montrer que si un plan $P = ax + by + cz = 0$ est stable par u, (a, b, c) est vecteur propre de ${}^tA$.

En déduire tous les plans stables par u.

VI) Dans $\mathbb{R}^3$, déterminer la perpendiculaire commune aux droites :

$$D_1 = \left\{ \begin{array}{c} x = 2z - 1 \\ y = 3z + 1 \end{array} \right\} ; D_2 = \left\{ \begin{array}{c} x = z - 1 \\ y = -2z + 1 \end{array} \right\}$$

VII) 1) Grâce à $f(x) = x^2$ sur $[-\pi, \pi]$, retrouver la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

2) En déduire $\displaystyle\int_0^1 xE(\frac{1}{x})dx$.

3) Pour $x \in]0, 1[$, établir que $\displaystyle\int_0^x \frac{\ln\,(1-t)}{t}dt = \int_{1-x}^1 \frac{\ln\,(t)}{1-t}dt$.

En déduire la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n n^2}$.

VIII) Développement en série de Fourier de $f\ :\ t \longmapsto \dfrac{1}{1+\cos^2(t)}$. On notera $I_n = \int_0^{\pi} \dfrac{\cos(nt)}{1+\cos^2(t)}$ et on montrera que $I_{n+1} + I_{n-1} + 6I_n = 0$ pour $n \geq 1$.

IX) Calculer $I_n = \int_0^{2\pi} e^{\cos(t)} cos(nt - \sin(t))dt$ pour $n \in I\!N$.

X) Soit $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(\ \mathrm{ch} t)^n}dt$.

En étudiant la monotonie de la foction $f(u) = u \ln\left(\mathrm{ch}\left(\dfrac{x}{\sqrt{u}}\right)\right)$ pour $x \in \boldsymbol{R}^+$, déduire que, $\forall n \in I\!N^*$, $\dfrac{1}{(\ \mathrm{ch})^{n+1}}\left(\dfrac{x}{\sqrt{n+1}}\right) \leq \dfrac{1}{(\ \mathrm{ch}\ )^n}\left(\dfrac{x}{\sqrt{n}}\right)$.

Montrer que la suite $(\sqrt{n} I_n)_n$ converge et donner sa limite.

Trouver une relation entre I_{n+1} et I_{n-1} et calculer nI_nI_{n-1}.

XI) Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 x}{x^2}dx$.

XII) Montrer que $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t(1+ix)}}{\sqrt{t}}dt$ vérifie une équation différentielle et trouver f.

XIII) Déterminer le couple (a, b) tel que $\displaystyle\int_0^1 (1 + at + bt^2)^2 dt$ soit minimale.

XIV) Soit E un ensemble fini et $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. Calculer $\sum\limits_{X \in \mathcal{P}(E)} cardX$ en fonction de $\mathrm{card}(E)$.

XV) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\boldsymbol{R})$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & A \\ {}^tA & 0 \end{pmatrix}$.Comparer le spectre de B et celui de ${}^tAA$.