

Feuille d'Exercices
Courbes et Surfaces

Exercice 1 :

1. Tracer la courbe paramétrée suivante :

$$x(t) = \frac{1}{t^2} + 2t \text{ et } y(t) = \frac{2}{t} + t^2$$

2. Déterminer une équation de la tangente au point de paramètre t .

Exercice 2 :

1. Tracer la courbe paramétrée suivante :

$$x(t) = \frac{1}{t^2} + 2t^2 - 2t \text{ et } y(t) = \frac{1}{t^2} + 2t$$

2. Trouver les coordonnées du point double. On pourra utiliser $x - y, x + y$.
3. Trouver des réels a, b, c pour que l'on ait :

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} y^2 - ax - by - c = 0$$

On dit alors que la courbe d'équation $y^2 - ax - by - c = 0$ est asymptote à Γ . Quelle est la nature de cette courbe ?

Exercice 3 :

Tracer la courbe paramétrée suivante :

$$x(t) = \tan(t) \text{ et } y(t) = \frac{1}{\sin(t)}$$

Exercice 4 : Tracer les courbes polaires suivantes :

1. $\rho = \sqrt{\cos(2\theta)}$.
2. $\rho = \frac{\cos(2\theta)}{\cos(\theta)}$.
3. $\rho = 3 - \cos(6\theta)$.
4. $\rho = \frac{\theta}{\theta^2 - 1}$.
5. $\rho = \frac{1}{1 + e^{-\theta}}$.

Exercice 5 : Calcul la longueur des courbes suivantes :

- 1) Néphroïde : $x(t) = 3 \cos t - \cos(3t), y(t) = 3 \sin t - \sin(3t)$
- 2) $\rho(\theta) = \cos^2(\theta)$.

Exercice 6 :

1. Donner la courbure au point O de la courbe : $\rho(\theta) = \cos^3(\theta)$.
2. Donner la courbure en tout point de l'arc défini par : $x(t) = \cos^2(t) + \ln(\sin(t))$, $y(t) = \sin(t) \cos(t)$.

Exercice 7 : On considère l'astroïde Γ définie par : $x(t) = \cos^3(t)$, $y(t) = \sin^3(t)$

1. Calculer la longueur de Γ .
2. Donner le rayon de courbure en tout point de Γ .
3. Etudier la développée de Γ .

Exercice 8 : Déterminer les courbes planes telles qu'en tout point le rayon de courbure R et l'abscisse curviligne s sont liés par la relation $R = 1 + s^2$.**Exercice 9 :** On considère la chaînette d'équation $y = \frac{\text{ch}(ax)}{x}$ où $a \neq 0$.

1. Tracer la courbe (branche infinie?).
2. Déterminer la longueur d'un arc de la chaînette.
3. Préciser repère de Frénet et le rayon de courbure en un point.

Exercice 10 : Montrer que l'équation $xe^y + y^2e^x = 0$ définit, dans une boule de centre O , une courbe passant par O . Donner sa tangente en O .**Exercice 11 :** On considère la surface d'équation $mz = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ où $a, b > 0$ et $m \neq 0$.

1. Déterminer les intersections de S avec les plans de coordonnées et avec un plan parallèle à (xOy) .
2. Déterminer les projections orthogonales de S sur les plans de coordonnées.
3. Déterminer les points réguliers de S et le plan tangent en un de ces points.

Exercice 12 : On considère les surfaces (S) d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ et

$C : x^2 - x + y^2 = 1$. Leur intersection est une courbe appelée V .

1. Reconnaître S et C .
2. Déterminer les points réguliers de S et C , et donner l'équation du plan tangent à (S) (resp : C) en un tel point.

On considère $M_0 \in V$.

Déterminer un vecteur directeur de la tangente à V si M_0 est régulier.

Tous les points de V sont-ils réguliers?