PSI **Vendredi 12 Mars 2012**
MATHEMATIQUES

Feuille d'Exercices
Equations différentielles

Exercice 1 : Résoudre l'équation différentielle :

$$(x^2-4)y'+xy=2$$

Préciser les solutions maximales.

Exercice 2 : Résoudre l'équation différentielle :

$$|x|y'+(x-1)y=x^2$$

Existe-t-il des solutions sur $\mathbb{R}$?

Exercice 3 : Résoudre l'équation différentielle :

$$(1+t)x''-x'-xt=0$$

sachant que $t \longmapsto e^t$ est solution.

Exercice 4 : Résoudre les équations différentielles :
1. $x^3y''+xy'-y=e^{\frac{1}{x}}$.
2. $y''-y=\dfrac{1}{\text{ch}x}$.
3. $y''+\dfrac{2x}{1+x^2}y'+\dfrac{y}{(1+x^2)^2}=0$ (faire le changement de variable $t=Arctanx$).

Exercice 5 :
1. Résoudre le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x' & = & 2y-2z \\ y' & = & -2x+z \\ z' & = & 2x-y \end{array}\right.$$

2. Prouver que les trajectoires du système différentiel ci-dessus sont contenues dans des plans parallèles de $\mathbb{R}^3$ (on ne considère que les solutions réelles).

Exercice 6 :
Déterminer les fonctions à valeurs réelles solutions des systèmes :
1.

$$\left\{\begin{array}{rcl} tx' & = & x-ty \\ ty' & = & tx+y \end{array}\right.$$

2.

$$\left\{\begin{array}{rcl} x'' & = & x'+y'-y \\ y'' & = & x'+y'-x \end{array}\right.$$

Exercice 7 : On considère l'équation différentielle $(H) : x'' + tx' + x = 0$.

1. Chercher les solutions de (H) développables en série entière.
2. Montrer qu'elles s'écrivent sous la forme $af_1 + bf_2, (a, b) \in \boldsymbol{R}^2$, où f_1 s'exprime à l'aide de fonctions usuelles connues et f_2 est la somme d'une série entière.
3. Justifier que (f_1, f_2) est un système fondamental de solutions de (H).
4. En utilisant la méthode de Lagrange avec f_1, exprimer d'une autre manière les solutions de (H) et identifier f_2 à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 8 : Résoudre l'équation différentielle : $y'(4 - x^2)^2 + 8xy^2 = 0$.

Exercice 9 : On considère l'équation différentielle $(E) : y' = x^2 + y^2$, où y désigne une fonction inconnue de la variable x.

1. Combien existe-t-il de solutions maximales impaires ?
2. Soit φ une solution maximale de (E) et I son intervalle ouvert de définition.

a) Montrer que φ est strictement croissante.

b) On suppose I borné. Montrer que $\varphi(I) = \boldsymbol{R}$.

Exercice 10 : Soit E l'espace des fonctions f de classe C^2 sur $[0.1]$ et telles que $f(0) = f'(0) = 0$.

1. Montrer que $N_1(f) = \underset{x\in I}{Sup}\, |f(x) + f''(x)|$ et $N_2(f) = \underset{x\in I}{Sup}\, |f(x)| + |f''(x)|$ définissent des normes sur E.
2. Montrer que N_∞ n'est ni équivalente à N_1, ni à N_2.
3. Montrer que N_1 et N_2 sont équivalentes.