Feuille d'Exercices
Expaces vectoriels - Applications linéaires

I. Applications directes du cours

Exercice 1 :
1) Soit $f \in \mathcal{L}(E), \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ n scalaires deux à deux distincts ($n \geq 2$) et pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}, F_i = \text{Ker}(f - \lambda_i Id_E)$.
Montrer que la somme $F_1 + F_2 + \cdots + F_n$ est directe.
2) E est maintenant un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $f^3 = Id_E$.
Montrer que $E = \text{Ker}(f - Id_E) \oplus \text{Ker}(f - jId_E) \oplus \text{Ker}(f - j^2 Id_E)$.

Exercice 2 : Soit $(p_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille de projecteurs de E associée à une somme directe $E = \underset{1 \leq i \leq n}{\oplus} F_i$ et $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille de scalaires.
On pose $f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i p_i$.
Calculer f^k pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 3 : Soit $E = \mathbb{K}_3[X]$, $F = \{P \in E / P(0) = P(1) = P(2) = 0\}$,
$G = \{P \in E / P(3) = P(1) = P(2) = 0\}$, $H = \{P \in E / P(-X) = P(X)\}$.
1. Montrer que $F \oplus G = \{P \in E / P(1) = P(2) = 0\}$.
2. Montrer que $F \oplus G \oplus H = E$.

Exercice 4 : Soient $(A, C) \in GL_n(\mathbb{K})^2$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Montrer que $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ est inversible et calculer son inverse.

Exercice 5 : Soit $r < p$. Que vaut le produit de :
$A = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_{n-r} \end{pmatrix}$ par $B = \begin{pmatrix} -I_p & 0 \\ 0 & I_{n-p} \end{pmatrix}$.

Exercice 6 : Soient $(a_0, \cdots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ deux à deux distincts et $(b_0, \cdots, b_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$.
Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que : $\forall i, P(a_i) = b_i$.

Exercice 7 :
1. Montrer qu'il n'existe pas de matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB - BA = I_n$.
2. Montrer que, si deux matrices vérifient $AB - BA = A$, alors A n'est pas inversible.

Exercice 8 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Montrer que si $rg(A) = 1$, alors $A^2 = Tr(A)A$.

Exercice 9 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Etablir $tr({}^t AA) = 0 \Longleftrightarrow A = 0$.

Exercice 10(ENSEA 06) : On note $E = \mathbb{R}_n[X]$. Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que les polynômes $(X - a)^k, 0 \leq k \leq n$, forment une base de E. Quelle en est la base duale ? Retrouver la formule de Taylor pour les polynômes.

Exercice 11 :

Soient $E = \boldsymbol{R}_3[X]$, $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ les éléments de E^* définies par :

$$\forall P \in E, \varphi_i(P) = \int_{-1}^{1} t^i \, P(t) dt$$

1. Montrer que $T = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)$ est une base de $(E)^*$.
2. Trouver la base antéduale de T.

Exercice 12 : Soient $n \in \mathbb{N}, a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$ deux à deux distincts.

Montrer qu'il existe $(\lambda_i)_{0 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^{n+1}$ unique tel que

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], P'(0) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i P(a_i)$$

Exercice 13 : Soit E un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie.

1. Soit $e \in E/\{0\}$. Montrer qu'il existe $\varphi \in E^*$ tel que $\varphi(e) = 1$.
2. Montrer que le seul vecteur de E en lequel s'annulle toute forme linéaire est 0.

II. Des exercices pour aller plus loin

Exercice 14 :(extraît de Mines 08)

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v de dimension $n \geq 1$, f un endomorphisme de E, nilpotent d'indice p.

1. Montrer qu'il existe x_0 vecteur de E, $(x_0, f(x_0), \cdots, f^{p-1}(x_0))$ est libre.
2. En déduire que $p \leq n$ et que $f^n = 0$.
3. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle le matrice est de la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & L \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & & \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \vdots & \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & \vdots & A \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \end{pmatrix}$$

4. Montrer que $p \leq rg(f) + 1$.
5. Montrer que : $\forall k, \dim(\ker f^k) \leq k\dim(\ker f)$.
6. Montrer que $p \geq \dfrac{n}{n - rg(f)}$.

Exercice 15 :(Mines) Soit E un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie ; déterminer tous les endomorphismes de E tels que pour tout x de E $(x, f(x))$ soit lié.

Exercice 16 :(Mines) Soient $n \in \mathbb{N}, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$ deux à deux distincts et pour $k \in [1, ..n]$, φ_k la forme linéaire définie sur $\mathbb{K}_n[X]$ par $\varphi_k(P) = P(a_k)$.

Montrer que $(\varphi_1, .., \varphi_n)$ est libre.

Exercice 17 :Notons $(a_i)_{1 \leq i \leq p}$ une famille de p réels distincts et L_i le i^{ime} polynôme de Lagrange associé à ces points.

1. Simplifier le polynôme $P_k = \sum_{i=1}^{p} a_i^k L_i$ lorsque k est un entier compris entre 0 et $p+2$.
2. Calculer $P_k(0)$ pour k, entier compris entre 0 et $p+2$.
3. Montrer que $W = \{f \in C^0(\mathbb{R}) / \forall i \in [1..p], f(a_i) = 0\}$ est un s.e.v de $C^0(\mathbb{R})$, dont un supplémentaire est $\mathbb{R}_{p-1}[X]$.

Exercice 18 : Montrer que :

$$\forall Q \in \mathbb{K}[X], \exists! P \in \mathbb{K}[X], P(X+1) - P(X) = Q \text{ et } P(0) = 0$$

Exercice 19 :(CCP 05)

1. Montrer que l'application qui à chaque matrice X de $\mathcal{M}_n(I\!K)$ associe $tr(AX)$ est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(I\!K)$.

2. Montrer que $\forall f \in (\mathcal{M}_n(I\!K))^*, \exists! M_f \in \mathcal{M}_n(I\!K), \forall X \in \mathcal{M}_n(I\!K), f(X) = tr(M_f\, X)$.

3. Soit f une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(I\!K)$ vérifiant : $\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(I\!K) \times \mathcal{M}_n(I\!K),\ f(AB) = f(BA)$.

a. Prouver que si i et j sont deux éléments distincts de $[1..n]$, alors : $f(E_{ij}) = 0$ et $f(E_{ii}) = f(E_{jj})$.

(Indication : utiliser la relation $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$).

b. En déduire l'existence de $\lambda \in I\!K$, tel que $f = \lambda\, tr$.

Exercice 20 : Soient $n \in I\!N^*, A \in \mathcal{M}_n(\boldsymbol{R}), f_A : \mathcal{M}_n(\boldsymbol{R}) \to \mathcal{M}_n(\boldsymbol{R}), X \longmapsto AX + XA$.

Calculer $\mathrm{tr}(f_A)$.

Exercice 21 : Soit f endomorphisme de E espace vectoriel de dimension finie tel que $f^2 = \lambda f$ où $\lambda \in I\!K^*$. Donner un lien entre $rg(f)$ et $tr(f)$.