

Feuille d'Exercices
Révisions d'algèbre linéaire de P.C.S.I

I. Applications directes du cours

Exercice 1 : Soit $E = \mathbf{R}^3$. Soit B la base canonique de E et $B' = (v_1 = (-1, 1, -3); v_2 = (3, 2, 1); v_3 = (2, 1, 1))$.

1. Montrer que B' est une base de E . Ecrire la matrice du vecteur $(5, 1, 2)$ dans B' .
2. Soit f défini par : $f(x, y, z) = (2x + z, x - 3y, -x + z)$.
 - a) Montrer que $f \in \mathcal{L}(E)$.
 - b) Calculer la matrice de f dans la base B , puis B' .
3. Déterminer noyau et image de f .

Exercice 2 :

1. Montrer que les deux familles $\mathcal{F}_1 = (u_1 = (1, 1, 0, 0); u_2 = (1, 0, 1, 0); u_3 = (1, 0, 0, 1))$ et $\mathcal{F}_2 = (v_1 = (2, 1, 0, 1); v_2 = (0, 1, -1, 0); v_3 = (0, 3, -4, 1))$ engendrent le même sous-espace vectoriel E de \mathbf{R}^4 .

2. Déterminer $(a, b, c, d) \in \mathbf{R}^4$ tels que $(x, y, z, t) \in E \iff ax + by + cz + dt = 0$.

Exercice 3 : Justifier que \mathbf{R}^{n+1} et $\mathbf{R}_n[X]$ sont isomorphes.

Exercice 4 : Soit $\mathcal{C} = \{(u_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} / (u_n)_{n \in \mathbf{N}} \text{ convergente}\}$.

Montrer que l'ensemble des suites constantes et l'ensemble des suites de limite nulle sont des sous-espaces supplémentaires de \mathcal{C} .

Exercice 5 :

1. Montrer que l'espace des fonctions paires et l'espace des fonctions impaires sont supplémentaires dans l'espace des fonctions définies sur \mathbf{R} .

2. Montrer que l'espace des matrices symétriques et l'espace des matrices antisymétriques sont supplémentaires dans l'espace des matrices d'ordre n .

Exercice 6 : a étant un réel fixé, on pose $A_a = \{P \in \mathbf{R}_n[X] / P(a) = 0\}$.

1. Montrer que A_a est un sous espace vectoriel de $\mathbf{R}_n[X]$.
2. Trouver la dimension de A_a et un supplémentaire de A_a dans $\mathbf{R}_n[X]$.

Exercice 7 : Soit f un endomorphisme de \mathbf{R}^3 dont la matrice dans la base canonique de \mathbf{R}^3 est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2/3 & 5/3 & 2/3 \\ 1/3 & 1/3 & 7/3 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer une base (u, v, w) de \mathbf{R}^3 telle que la matrice de f dans cette base soit

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

2. Montrer que f est un automorphisme et déterminer sa réciproque

Exercice 8 : Soit f l'application définie par :

$$\forall P \in \mathbf{R}_3[X], f(P) = P(X) + (X - a)P'(X) + (X - a)^2P''(X)$$

1. Justifier que $((X - a)^k)_{0 \leq k \leq 3}$ est une base B de $\mathbf{R}_3[X]$. Donner les coordonnées d'un polynôme P dans cette base.

2. Justifier que f est un endomorphisme de $\mathbf{R}_3[X]$. Ecrire la matrice de f dans B , puis dans la base canonique de $\mathbf{R}_3[X]$.

3. Déterminer noyau et image de f .

Exercice 9 : Dans \mathbf{R}^3 rapporté à sa base canonique, soit les deux sous espaces vectoriels :

$$\Pi = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 / x + 2y + 3z = 0\}, D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 / 2x = 3y = 6z\}$$

Vérifier que Π et D sont supplémentaires dans \mathbf{R}^3 puis déterminer la matrice de projection sur D parallèlement à Π relativement à la base canonique de \mathbf{R}^3 .

Exercice 10 : Soit E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - 3f + 2Id_E = 0$. On pose $p = 2Id_E - f$.

1. Vérifier que p est un projecteur.

2. Déterminer deux s.e.v F et G de E supplémentaires dans E tels :

$$\forall x \in F, f(x) = x, \text{ et } \forall x \in G, f(x) = 2x$$

3. Déterminer f^n en fonction des puissances de p et de $Id_E - p$.

Exercice 11 : Soit $E = \{f_{a,b} : x \mapsto (ax + b)e^{2x}, (a, b) \in \mathbf{R}^2\}$.

1. Montrer que E est un espace vectoriel de dim finie et trouver une base B de E .

2. Montrer que $\varphi : f \mapsto f'$ est un endomorphisme de E . Donner sa matrice dans B .

2. En déduire une solution de l'équation différentielle :

$$y^{(3)} - y'' - 2y' - 3y = (-\lambda x + 4)e^{2x}$$

Exercice 12 : Soit E le sous ensemble des fonctions continues sur \mathbf{R} à valeurs dans \mathbf{R} constitué des fonctions f telles que :

$$\exists (a, b, c) \in \mathbf{R}^3, \forall x \in \mathbf{R}, f(x) = a \cos 2x \cos x + b \sin 2x \sin x + c \cos x$$

1. Montrer que E est un sous espace vectoriel de $\mathcal{C}^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$.

2. La famille (f_1, f_2, f_3) définie pour tout $x \in \mathbf{R}$ par :

$$f_1(x) = \cos 2x \cos x, f_2(x) = \sin 2x \sin x, f_3(x) = \cos x$$

est-elle libre dans E ?

3. Montrer que tout élément de E s'écrit pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$f(x) = A \cos x + B \cos 3x$$

où A et B dépendent de f (mais pas de x).

En déduire une base de E .

II. Des exercices pour aller plus loin

Exercice 13 : Soit l'espace vectoriel $T_{s,n}$ des matrices triangulaires supérieures d'ordre n et \mathcal{A}_n celui des matrices antisymétriques.

Soit l'application

$$\begin{aligned} \varphi : T_{s,n} &\longrightarrow \mathcal{A}_n \\ A &\longmapsto A - {}^tA \end{aligned}$$

Montrer que φ est une application linéaire surjective. En déduire la dimension de \mathcal{A}_n et celle de l'espace des matrices symétriques.

Exercice 14 : Soit $E = \mathbb{K}[X]$, $\Delta : E \rightarrow E, P(X) \mapsto P(X+1) - P(X)$ et $D : E \rightarrow E, P(X) \mapsto P'(X)$.

1. Justifier que $\Delta \in \mathcal{L}(E)$.
2. Déterminer $\ker(D)$ puis $\ker(\Delta)$.
3. Etablir que $\forall n \in \mathbb{N}, \Delta(\mathbb{K}_{n+1}[X]) = \mathbb{K}_n[X]$.
4. En déduire la surjectivité de Δ .

5. En considérant la restriction de Δ à $\mathbb{K}_n[X]$ avec n à choisir, puis la matrice de cette restriction, trouver $P \in E$ de degré minimal tel que $P(X+1) - P(X) = X^4$.

6. Exprimer Δ en fonction des puissances de D .

Exercice 15 : Soit E le \mathbb{R} -espace vectoriel $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\varphi \in \mathcal{F}(E, E)$, qui à f de E associe g définie par $g(x) = \int_0^x t f(t) dt$.

Montrer que φ est un endomorphisme de E et déterminer noyau et image.

Pourquoi en déduit-on que E est de dimension infinie ?

Exercice 16 : (Mines)

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et f et g deux endomorphismes de E .

1. Montrer qu'il existe un endomorphisme h tel que $h \circ f = g$ ssi $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(g)$.
2. Montrer qu'il existe un endomorphisme h tel que $f \circ h = g$ ssi $\text{Im}(g) \subset \text{Im}(f)$.

Exercice 17 : (CCP)

Soient E un espace vectoriel de dimension n et f et g deux endomorphismes de E .

1. Montrer que $rg(f \circ g) \leq \text{Min}(rg(f), rg(g))$.
2. Montrer que $rg(f \circ g) \geq rg(f) + rg(g) - n$.

Exercice 18 : (Mines)

Soient E un espace vectoriel de dimension n et $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$ telles que $f \circ g = 0$ et $f + g$ soit un automorphisme.

Montrer que $rg(f) + rg(g) = n$.

Exercice 19 : (CCP)

Soit E un espace vectoriel de dimension n .

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $f^k = 0$.

a) Montrer que $f^n = 0$. (On traitera d'abord le cas $k \leq n$ puis pour $k > n$, on montrera que la suite $(\dim(\ker f^i))_{i \in \mathbb{N}}$ est stationnaire).

b) Etablir l'existence d'un plus petit entier $p \leq n$ tel que $f^p = 0$.

2. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$.

a) Montrer qu'il existe une base B de E telle que :

$$\text{Mat}_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

b) Si on note A la matrice précédente, résoudre l'équation $X^2 = A$