

PREMIER PROBLÈME

On considère dans tout ce problème les deux fonctions F et G définies sur \mathbb{R}_+^* par :

$$F(x) = \frac{\sin(x)}{x} \qquad G(x) = \frac{1 - \cos(x)}{x}$$

Partie A : Etudes de deux fonctions

1. (a). Montrer que les fonctions F et G sont continues sur \mathbb{R}_+^* .
 (b). Montrer que F et G sont prolongeables par continuité en 0. On notera encore F et G ces prolongements.
2. (a). Montrer que les fonctions F et G sont dérivables sur \mathbb{R}_+^* et calculer leurs dérivées.
 (b). Démontrer, à l'aide de développements limités, que les fonctions F et G sont dérivables en 0. Préciser les valeurs de $F'(0)$ et $G'(0)$.
3. (a). Montrer que les réels strictement positifs tels que $F(x) = 0$ constituent une suite $(a_k)_{k \geq 1}$ strictement croissante. On donnera explicitement la valeur de a_k .
 (b). Montrer que les réels strictement positifs tels que $G(x) = 0$ constituent une suite $(b_k)_{k \geq 1}$ strictement croissante. Y-a-t'il un lien entre les suites $(a_k)_{k \geq 1}$ et $(b_k)_{k \geq 1}$?
4. (a). Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer sans calcul qu'il existe un réel $x_k \in]a_k, a_{k+1}[$ tel que $F'(x_k) = 0$.
 (b). Montrer que la fonction F' est de même signe que $h : x \mapsto x \cos(x) - \sin(x)$ sur \mathbb{R}_+^* .
 (c). Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la fonction h est strictement monotone sur $[a_k, a_{k+1}]$.
 (d). En déduire l'unicité du réel x_k défini dans la question 4.(a).
 (e). Etablir que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, x_k \in]a_k, a_k + \frac{\pi}{2}[$.
 (f). Calculer $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k$ puis déterminer un équivalent simple de la suite (x_k) .
5. Tracer l'allure de la courbe représentative \mathcal{C}_F de la fonction F lorsque l'abscisse x varie dans $[0, 4\pi]$. On se placera dans un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) tel que $\|\vec{i}\| = 1\text{cm}$ et $\|\vec{j}\| = 10\text{cm}$. On fera apparaître clairement les tangentes horizontales à la courbe et on précisera les abscisses des points d'intersection de \mathcal{C}_F avec l'axe (O, \vec{i}) .

Partie B : Deux fonctions définies par des intégrales

Dans toute cette partie, E désigne l'ensemble des fonctions de classe C^1 sur $[0, 1]$. Si f appartient à E , on pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$I_f(x) = \int_0^1 f(t) \cos(xt) dt \qquad J_f(x) = \int_0^1 f(t) \sin(xt) dt$$

Soit f une fonction appartenant à E .

6. Soit $x \in \mathbb{R}$. Justifier que les deux réels $I_f(x)$ et $J_f(x)$ sont bien définis.
 On dispose donc de deux fonctions I_f et J_f définies sur \mathbb{R} .
7. Déterminer la parité des fonctions I_f et J_f .
8. On se propose de calculer dans cette question les limites de I_f et J_f en $+\infty$ et en $-\infty$.
 (a). Etablir que : $\forall x > 0, I_f(x) + iJ_f(x) = \frac{f(1)e^{ix} - f(0)}{ix} - \frac{1}{ix} \int_0^1 f'(t)e^{ixt} dt$.
 (b). Expliquer rapidement pourquoi les fonctions f et f' sont bornées sur $[0, 1]$.
 On posera par la suite $M = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$ et $M' = \sup_{x \in [0,1]} |f'(x)|$.
 (c). En déduire qu'il existe $A \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x > 0, |I_f(x) + iJ_f(x)| \leq \frac{A}{x}$.
 (d). A l'aide de la question 8.(c), calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (I_f(x) + iJ_f(x))$.
 En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} I_f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} J_f(x)$.
 (e). En utilisant une propriété obtenue sur les fonctions I_f et J_f , calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} I_f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} J_f(x)$.
9. L'objectif de cette question est de prouver que les fonctions I_f et J_f sont continues sur \mathbb{R} .
 (a). Soient p et q deux réels. Rappeler la formule liant $\cos(p) - \cos(q)$ à $\sin(\frac{p+q}{2})$ et $\sin(\frac{p-q}{2})$.
 (b). Démontrer que : $\forall u \in \mathbb{R}, |\sin(u)| \leq |u|$ (on pourra par exemple utiliser l'inégalité des accroissements finis).
 (c). Soient x et y deux réels. Etablir que : $|I_f(x) - I_f(y)| \leq |x - y| \int_0^1 t|f(t)| dt$.
 (d). En déduire que la fonction I_f est continue sur \mathbb{R} .
Par un raisonnement analogue, on pourrait démontrer que la fonction J_f est continue sur \mathbb{R} mais ce n'est pas demandé ici.
10. A l'aide d'une fonction f judicieusement choisie, établir un lien entre les fonctions F et G de la partie A, et les fonctions I_f et J_f de la partie B.

DEUXIÈME PROBLÈME

Dans tout ce problème, on se place dans l'espace usuel dont on notera \mathcal{E} l'ensemble des points, E l'ensemble des vecteurs et $\vec{0}$ le vecteur nul. \mathcal{E} est muni d'un repère orthonormal direct $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, toutes les équations de l'énoncé seront relatives aux éléments de ce repère. Si $M \in \mathcal{E}$ et $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ on pourra noter $M = (x, y, z)$ et $\vec{OM} = (x, y, z)$.

On considère les ensembles P et Q d'équations cartésiennes :

$$P : x + z = 0, Q : x + y + z - 3 = 0.$$

Partie A — Étude d'un mouvement dans l'espace

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on introduit le point $N(t)$ de \mathcal{E} caractérisé dans \mathcal{R} par les coordonnées

$$\begin{cases} a(t) = \frac{\cos(t)}{\sqrt{2}} \\ b(t) = \sin(t) \\ c(t) = \frac{-\cos(t)}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

1. Prouver que $N(t)$ appartient au plan P .
2. Donner une équation paramétrique de la droite D intersection de P et Q . Est-il possible que $N(t) \in D$?
3. Calculer $a^2(t) + b^2(t) + c^2(t)$. En déduire que $N(t)$ appartient à un cercle de P dont on précisera le centre et le rayon.
4. Calculer la distance de $N(t)$ à la droite D puis au plan Q , on pourra vérifier que leur rapport est constant.
5. Prouver que pour tout $t \in \mathbb{R} : \exp(it) + \exp(i(t + 2\pi/3)) + \exp(i(t - 2\pi/3)) = 0$.
6. En déduire l'isobarycentre des points $N(t), N(t + 2\pi/3), N(t - 2\pi/3)$.

Partie B — Construction d'un polynôme

On fixe maintenant $t \in \mathbb{R}$ et on note

$$\begin{cases} s(t) = a(t) + b(t) + c(t) \\ d(t) = a(t)b(t) + a(t)c(t) + b(t)c(t) \\ p(t) = a(t)b(t)c(t) \end{cases}$$

7. Simplifier $s(t)$.
8. Linéariser le produit de fonctions trigonométriques $p(t)$.
9. Calculer $d(t)$ de deux manières différentes — on pourra utiliser un résultat de la question 3.
10. On considère maintenant le polynôme $R(X) = (X - a(t))(X - b(t))(X - c(t))$, dont les racines sont donc $a(t), b(t)$ et $c(t)$:
 - 10.a. Dans cette question seulement $t = \pi/2$. Montrer *sans calculer* $R(X)$ ni $R'(X)$ que $R'(0) = 0$.
 - 10.b. Exprimer maintenant $R(X)$ en fonction de $s(t), d(t), p(t)$, puis en fonction des résultats des questions précédentes.

Partie C — Endomorphismes à noyau imposé

11. Montrer que P définit un plan vectoriel de E .
12. Est-ce le cas pour Q ? Préciser, sans preuve, la structure algébrique de Q .

13. On introduit les vecteurs :

$$\vec{i}' = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} - \vec{k}), \vec{j}' = \vec{j}, \vec{k}' = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{k}).$$

Montrer que (\vec{i}', \vec{j}') est une base orthonormale de P et que \vec{k}' en est un vecteur normal. En déduire que $B' = (\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ est une base orthonormale de l'espace.

14. On désigne par $\vec{a} \cdot \vec{b}$ le produit scalaire de deux vecteurs \vec{a} et \vec{b} . Soit $\vec{e} \in E$. Prouver, autrement que par « c'est du cours », que ses coordonnées dans la base B' sont données par :

$$\vec{e} = (\vec{e} \cdot \vec{i}')\vec{i}' + (\vec{e} \cdot \vec{j}')\vec{j}' + (\vec{e} \cdot \vec{k}')\vec{k}'$$

15. On considère ici une application linéaire $u : E \rightarrow E$ telle que $P \subset \ker(u)$.

15.a. Prouver qu'il existe $\vec{z} \in E$ tel que $u(\vec{e}) = (\vec{e} \cdot \vec{k}')\vec{z}$ pour tout $\vec{e} \in E$.

15.b. Réciproquement, montrer qu'une application u donnée par la formule précédente est un endomorphisme de E tel que $P \subset \ker(u)$.

15.c. Donner une condition nécessaire et suffisante sur \vec{z} pour que $P = \ker(u)$. Donner dans ce cas le rang et l'image de u .

Partie D — Matrices de projecteur

On note ici $p : E \rightarrow E$ le projecteur orthogonal sur le plan P , B la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et $B' = (\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ la base introduite à la question 13. On introduit les matrices :

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

16. Justifier très rapidement que M' est la matrice de p dans la base B' .
17. Donner la matrice de passage P de la base B à la base B' ainsi que son inverse — on détaillera le raisonnement pour cette dernière.
18. Soit M la matrice de p dans la base B :
 - 18.a. Justifier *sans calcul* que $M^2 = M$.
 - 18.b. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(M + I)^n = I + (2^n - 1)M.$$
 - 18.c. Exprimer M en fonction de P, P^{-1} et M' . Ensuite, calculer explicitement M .
19. On peut traiter cette partie sans avoir trouvé explicitement M . On introduit l'ensemble \mathcal{M} des matrices du type $M_{a,b} = aM + bI$, où a et b sont réels :
 - 19.a. Montrer que l'ensemble \mathcal{M} muni des lois usuelles sur les matrices a une structure de \mathbb{R} -espace vectoriel dont on donnera une base et la dimension.
 - 19.b. Les réels a et b étant donnés, exprimer $M_{a,b}$ en fonction de P, P^{-1}, I et M' . En déduire une forme factorisée du déterminant de $M_{a,b}$ ainsi qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'elle soit inversible.
 - 19.c. Déterminer les réels e et f tels que $M_{a,b} \times M_{c,d} = M_{e,f}$.
 - 19.d. Lorsque $M_{a,b}$ est inversible, exprimer son inverse sous la forme d'un élément de \mathcal{M} .

FIN DE L'ÉPREUVE