

Préparation à l'oral

Planche 1

Exercice 1 :

Soit $E = \mathbf{R}_n[X]$. On considère l'application

$$\begin{aligned} \varphi : E &\rightarrow \mathbf{R} \\ P &\longmapsto \int_{-1}^1 \frac{P(t)}{1+t^2} dt \end{aligned}$$

Soient (x_0, x_1, \dots, x_n) $n + 1$ réels distincts.

Démontrer qu'il existe $n + 1$ réels uniques (a_0, a_1, \dots, a_n) , tels que $\forall P \in E, \varphi(P) = \sum_{k=0}^n a_k P(x_k)$.

Donner une méthode « pratique » de calcul des a_i .

Exercice 2 :

1) Montrer que, pour $0 < x < 1$, $f(x) = \int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t} dt = \int_{1-x}^1 \frac{\ln t}{1-t} dt$.

2) En admettant que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, montrer que $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n n^2} = \frac{(\ln 2)^2}{2} - \frac{\pi^2}{12}$.

3) A l'aide du développement en série de Fourier de la fonction 2π périodique coïncidant avec l'identité sur $[-\pi, \pi]$, montrer le résultat précédemment admis.

Planche 2

Exercice 1 :

On définit la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ par :

$$\forall x \in [0, 1], f_1(x) = \sqrt{2 + 2x} \text{ et } \forall n \in \mathbf{N}^*, f_{n+1}(x) = \sqrt{2 + f_n(x)}.$$

1. Etablir que : $\forall x \in [0, 1], (f_n(x))_{n \in \mathbf{N}^*}$ est croissante, majorée par 2 et minorée par $\sqrt{2}$.

2. Etablir la convergence simple de $(f_n(x))_{n \in \mathbf{N}^*}$ sur $[0, 1]$.

3. Etudier la suite $(a_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ où $a_n = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{\dots + \sqrt{2 + 2x}}}}}$.

Exercice 2 :

Soit P la courbe d'équation $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$.

1. Justifier qu'il existe $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $x = \cos^4(\theta)$, $y = \sin^4(\theta)$.

2. Montrer que $y = x$ est un axe de symétrie pour P .

3. Trouver une équation cartésienne de P dans le repère (O, I, J) où $I = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

et $J = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4. En déduire nature, construction et longueur de P .

Planche 3

Exercice 1 :

Soit $E = \mathbf{R}_n[X]$ muni de sa base canonique B_0 .

1. Soit $B_1 = ((1 + X)^k)_{0 \leq k \leq n}$. Justifier que B_1 est une base de E .
2. Soit $P \in E$ de coordonnées $(a_k)_{0 \leq k \leq n}$ dans B_0 et $(b_k)_{0 \leq k \leq n}$ dans B_1 .
3. Donner la matrice de passage de B_0 à B_1 et son inverse.
 - (a) Pour chaque $k \in \{0..n\}$, donner a_k en fonction des $(b_p)_{0 \leq p \leq n}$.
 - (b) Pour chaque $k \in \{0..n\}$, donner b_k en fonction des $(a_p)_{0 \leq p \leq n}$.
4. Soit S_n l'ensemble des permutations de $[1..n]$ dans lui même et D_n le nombre de permutations de S_n n'ayant pas de point fixe. On pose $D_0 = 1$
 - (a) Montrer que $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D_{n-k} = n!$.
 - (b) En déduire D_n .

Exercice 2 : En calculant par 2 méthodes, $\int \int_{(x,y) \in [0,1] \times [0, \frac{\pi}{2}]} \frac{dx dy}{1 + x^2 \tan^2 y}$, calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t) dt$.

Planche 4

Pour $n \in \mathbf{N}$ et $x \in [-1, 1]$, on pose $T_n(x) = \cos(\arccos x)$.

Pour $n \geq 1$, calculer $T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x)$ et en déduire une relation de récurrence entre T_{n+1}, T_n, T_{n-1} .

Montrer que T_n est un polynôme de degré n exactement dont on déterminera le coefficient dominant. Calculer $T_n(1)$ et $T_n(-1)$.

Montrer que (T_0, \dots, T_n) est une base de $\mathbf{R}_n[X]$.

On pose $\tilde{T}_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} T_0$ et, pour $n \geq 1$, $\tilde{T}_n = \frac{2}{\sqrt{\pi}} T_n$.

Montrer que $(\tilde{T}_0, \dots, \tilde{T}_n)$ est une b.o.n de $\mathbf{R}_n[X]$ pour le produit scalaire $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 \frac{P(x)Q(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$

Montrer que $\lim_{p \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p(t) dt = 0$.

Montrer que, sur $\mathbf{R}[X]$, $\|P\| = \sqrt{\langle P, P \rangle}$ et $N(P) = \sup_{t \in [-1, 1]} |P(t)|$ ne sont pas deux normes équivalentes.

Déterminer P tel que $\|X^3 - P(X)\| = \inf_{R \in \mathbf{R}_2[X]} \|X^3 - R(X)\|$.

Planche 5

Exercice 1 : Justifier la convergence et donner la somme des séries suivantes :

$$\sum_{n \geq 0} \frac{2n+1}{n!}, \sum_{n \geq 1} \left(n + \frac{1}{n}\right) \frac{1}{2^n(n-1)!}$$

Exercice 2 : Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{10}(\mathcal{C})$ dont le polynôme caractéristique est $P(X) = X(X-1)^2(X-2)^2(X-3)^4$.

Montrer que (I_{10}, A, \dots, A^9) est génératrice de l'algèbre $\mathcal{C}[A]$ des polynômes en A et expliciter les a_i tels que $A^{20} = \sum_{i=0}^9 a_i A^i$.

Planche 6

Exercice 1 :

1. Tracer la courbe C d'équation polaire : $\rho = \frac{\sin(3\theta)}{1 + \sin(2\theta)}$.
2. On oriente C dans le sens des t croissants. Calculer les rayons de courbures en O pour chacun des arcs passant par ce point et au point $A(\theta = \frac{\pi}{2})$.

Exercice 2 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et (A, B) deux matrices d'ordre n symétriques et réelles, démontrer :

- 1) $\text{tr}(AB + BA) \leq 4(\text{tr}(A^2) + \text{tr}(B^2))$
- 2) $(\text{tr}(AB + BA))^2 \leq 4\text{tr}(A^2)\text{tr}(B^2)$ (question indépendante de la précédente)

Planche 7

Exercice 1 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ définie par blocs : $B = \begin{pmatrix} A & 4A \\ A & A \end{pmatrix}$.

- 1) Etudier la diagonalisabilité de $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
- 2) Montrer que B est semblable à $\begin{pmatrix} -A & 0 \\ 0 & 3A \end{pmatrix}$.
- 3) Montrer que B est diagonalisable dans $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ ssi A l'est dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 2 :

Soit S_n le nombre de solutions $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ de l'équation $2x + 3y = n$ où n est un entier naturel donné.

1. Montrer que, $\forall t \in]-1, 1[$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^{2n} \sum_{n=0}^{\infty} t^{3n} = \sum_{n=0}^{\infty} S_n t^n$$

2. Développer en série entière la fonction $t \mapsto \frac{1}{(1-t^2)(1-t^3)}$.
3. En déduire S_n .

Planche 8

Exercice 1 :

- 1) Montrer que $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ sont semblables.
- 2) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables ?

Exercice 2 : Soit h une application continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. Etudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_n$ où $f_n(x) = h(x)(\sin x)^n$. Etudier la convergence uniforme.

Planche 9

Exercice 1 : Ensemble de définition de $g : x \mapsto \int_0^1 \frac{\cos(xt)}{\sqrt{1-t^2}} dt$. Montrer que g est paire et C^2 sur \mathbf{R} . Montrer que g vérifie une équation différentielle et déterminer son développement en série entière.

Exercice 2 : Soit A , réelle, carrée d'ordre impair, de déterminant égal à 1 et dont les racines complexes du polynôme caractéristique sont de module 1. Montrer que 1 est valeur propre de A .

Planche 10

Exercice 1 : Pour A matrice carrée d'ordre n et inversible, montrer qu'il existe un polynôme de degré n tel que $P(A) = A^{-1}$.

Exercice 2 :

Montrer que f définie par $f(x) = \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = \frac{1}{2}$ est C^∞ sur \mathbf{R} .

Exercice 3 : Nature de la surface d'équation $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xz - 4 = 0$.

Planche 11

Exercice 1 : Soient $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$. Calculer le déterminant de la matrice

$$\begin{pmatrix} a+b & a+c & b+c \\ a^2+b^2 & a^2+c^2 & b^2+c^2 \\ a^3+b^3 & a^3+c^3 & b^3+c^3 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 : Pour $1 < a < b$, calculer $\int \int_{a \leq y \leq b, 0 \leq x \leq \pi} \frac{1}{y - \cos(x)} dx dy$.

Planche 12

Exercice 1 :

En observant que $A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathcal{C})$, est la somme de puis-

sances d'une matrice donnée, montrer que A est diagonalisable et chercher ses éléments propres.

Exercice 2 :

On note, pour tout $n \in \mathbf{N} - \{0, 1\}$: $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x}{n}}}{\ln(x)} dx$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N} - \{0, 1\}$, I_n existe et que :

$$I_n = \frac{n}{\ln(n)} \int_{\frac{e}{n}}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1 + \frac{\ln(t)}{\ln(n)}} dt$$

2. En déduire : $I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{\ln(n)}$.

Planche 13

Exercice 1 :

L'application f définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par $f(M) = M + \text{tr}(M)I_n$ est-elle un endomorphisme ?

Trouver son noyau et rang, un polynôme annulateur de degré 2. f est-il diagonalisable ? Inversible ? si oui, donner f^{-1} .

Exercice 2 : Nature de la surface d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 2yz - 4x + 4y - 1 = 0$.

Existe-t-il des plans tangents à cette surface et parallèles au plan $x + y + z = 0$.

Planche 14

Exercice 1 : Montrer qu'il existe un unique couple de réels (a, b) tel que, au voisinage de

$$+\infty, \sum_{k=0}^n \ln(k+n) = n \ln(n) + an + b + o(1).$$

Exercice 2 :

1. Donner la nature des surfaces d'équations $S1 : x = x^2 + y^2$ puis $S2 : x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
2. Déterminer l'équation du plan tangent en un point de $S1$ (resp de $S2$).
3. On pose $\Gamma = S1 \cap S2$. Donner la tangente en un point régulier de Γ .

Planche 15

Exercice 1 : Soit E un ensemble fini et $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E . Calculer

$$\sum_{X \in \mathcal{P}(E)} \text{card}(X) \text{ en fonction de } \text{card}(E).$$

Exercice 2 : Calculer par deux méthodes l'intégrale curviligne $I = \int_C x^3 dy - y^3 dx$ où C est le cercle de centre O et de rayon R parcouru dans le sens direct.