PSI Jeudi 2 Septembre 2010
MATHEMATIQUES

Feuille d'Exercices
Révisions d'algèbre linéaire de P.C.S.I

I. Applications directes du cours ou presque

Exercice 1 :(CCP) Dans $\boldsymbol{R}^3$ rapporté à sa base canonique, soit les deux sous espaces vectoriels :

$$\Pi = \{(x,y,z) \in \boldsymbol{R}^3 / x + 2y + 3z = 0\}, D = \{(x,y,z) \in \boldsymbol{R}^3 / 2x = 3y = 6z\}$$

Vérifier que Π et D sont supplémentaires dans $\boldsymbol{R}^3$.

Donner $p(x,y,z)$ pour $(x,y,z) \in \boldsymbol{R}^3$ où p est le projecteur sur D parallèlement à Π.

Déterminer la matrice de p relativement à la base canonique de $\boldsymbol{R}^3$.(on proposera deux méthodes)

Exercice 2 : Dans $\mathcal{M}_2(\boldsymbol{R}), F$(resp : G) est formé des matrices $\begin{pmatrix} a & 2a+b \\ -b & -a \end{pmatrix}$ (resp : des matrices $\begin{pmatrix} a & 3a+b \\ -b & -2a+b \end{pmatrix}$), où $(a,b) \in \boldsymbol{R}^2$. Montrer que $\mathcal{M}_2(\boldsymbol{R}) = F \oplus G$.

Exercice 3 : Dans $E = \boldsymbol{R}_3[X]$, on considère $\varphi : P \longmapsto (X^2-1)P'' + 2XP'$. Déterminer la matrice de φ dans la base canonique de E. En déduire kerφ et Imφ.

Exercice 4 : Soit $E = \{f_{a,b} : x \longmapsto (ax+b)e^{2x}, (a,b) \in \boldsymbol{R}^2\}$.

1. Montrer que $\varphi : f \longmapsto f'$ est un endomorphisme de E. Donner sa matrice dans la base $(x \longmapsto x\, e^{2x}, x \longmapsto e^{2x})$.

2. En déduire une solution de l'équation différentielle :

$$y^{(3)} - y'' - 2y' - 3y = (-\lambda x + 4)e^{2x}$$

Exercice 5 : Soient $E = \{(u_n)_{n\in I\!N} \in \boldsymbol{R}^{I\!N} / \forall n \in I\!N, u_{n+3} - u_{n+2} - u_{n+1} + u_n = 0\}$, $E_1 = \{(u_n)_{n\in I\!N} \in \boldsymbol{R}^{I\!N} / \forall n \in I\!N, u_{n+1} + u_n = 0\}$, $E_2 = \{(u_n)_{n\in I\!N} \in \boldsymbol{R}^{I\!N} / \forall n \in I\!N, u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n = 0\}$.

1. a) Montrer que E est un $\boldsymbol{R}$e.v et que E_1 est un sev de E.

b) Montrer que E_1 est de dimension finie En donner une base et la dimension.

2. Soit $(u_n)_{n\in I\!N} \in \boldsymbol{R}^{I\!N}$ une suite de E_2. On pose $v_n = u_{n+1} - u_n$.

a) Montrer que $(v_n)_n$ est constante.

b) En déduire que E_2 est un sev de E de dimension finie, et en donner une base et la dimension.

3. Montrer que E_1 et E_2 sont deux sev supplémentaires dans E.

4. En déduire que E est de dimension finie et en préciser une base et la dimension.

5. En montrant que $\Psi : E \to \boldsymbol{R}^3, (u_n)_{n\in I\!N} \in \boldsymbol{R}^{I\!N} \longmapsto (u_0, u_1, u_2)$ ets un isomorphisme, retrouver que E est de dimension finie et sa dimension.

Exercice 6 : Soient $E = \mathcal{M}_2(\boldsymbol{R})$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. On note U l'application définie sur E par : $\forall M \in E, U(M) = AM$.
Montrer que U est un endomorphisme de E.
2. Donner la matrice de U dans la base canonique de E.
3. Déterminer le noyau et l'image de U.

Exercice 7 : On considère l'application définie sur $E = \boldsymbol{R}_3[X]$ par :

$$\forall P \in E, f(P) = Q \text{où} Q(X) = P(X+1) - P(X)$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.
2. Donner sa matrice dans la base canonique de E.
3. Donner son noyau et image.
4. Résoudre l'équation d'inconnue $P \in E$: $P(X+1) - P(X) = X^2$.
5. On prolonge f sur $\boldsymbol{R}_n[X]$: déterminer son noyau et image.
6. On prolonge f sur $\boldsymbol{R}[X]$: déterminer son noyau et image.

Exercice 8 : Soit $E = \mathcal{F}(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R})$ et C l'application de E dans E définie par :

$$C(f) : x \longmapsto f(-x)$$

1) Vérifier que C est une symétrie vectorielle.

2) On considère $\mathcal{P}$ (resp : $\mathcal{I}$), le sous-ensemble de E des fonctions paires (resp : impaires).

Interpréter $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ comme les noyaux de deux applications linéaires à déterminer.

Exercice 9 : Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer M^n, $(I+M)^n, n \geq 2$.
2. Soit $\mathcal{C} = \{A \in \mathcal{M}_3(\boldsymbol{R}) / AM = MA\}$. Montrer que c'est un s.e.v de $\mathcal{M}_3(\boldsymbol{R})$ et en donner une base.
3. Montrer que C est une sous algèbre de $\mathcal{M}_3(\boldsymbol{R})$ (i.e reste stable par produit matriciel).

II. Des exercices pour aller plus loin

Exercice 10 : Soit E un espace vectoriel de dimension finie, f un endomorphisme de E tel que $f + f^2 = 0$. Montrer que $E = \ker(f) \oplus \text{Im}(f)$.

Exercice 11 : Soit $\varphi : \boldsymbol{R}_3[X] \longmapsto \boldsymbol{R}_3[X], P \longmapsto R$, où R est le reste de la division euclidienne de $(X^4 - 1)P$ par $X^4 + X^2$.

Vérifier que $\varphi \in \mathcal{L}(\boldsymbol{R}_3[X])$ puis déterminer la matrice de φ dans la base canonique de $\boldsymbol{R}_3[X]$. En déduire $\ker\varphi$ et $\text{Im}\varphi$.

Exercice 12 :(e3a) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -1 \\ -5 & 8 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer $\mathrm{Ker}(f - 4Id_E)$ et $\mathrm{Ker}(f - 2Id_E)$.

2.Trouver une base (u, v, w) de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Calculer $A^n, n \in \mathbb{Z}$.

On pose $C(f) = \{g \in \mathcal{L}(E)/f \circ g = g \circ f\}$.

4. Montrer que si $g \in C(f)$, alors $g(\mathrm{Ker}(f - 4Id_E)) \subset \mathrm{Ker}(f - 4Id_E)$ et $g(\mathrm{Ker}(f - 2Id_E)) \subset \mathrm{Ker}(f - 2Id_E)$.

5. Montrer que $g \in C(f) \iff \exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, Mat_{B_0}(g) = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$.

6. En déduire que $C(f)$ est un s.e.v de $\mathcal{L}(E)$ de dim 3 et $C(f) = vect(Id, f, f^2)$.

Exercice 13 : Soit l'espace vectoriel $T_{s,n}$ des matrices triangulaires supérieures d'ordre n et $\mathcal{A}_n$ celui des matrices antisymétriques.

Soit l'application

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & T_{s,n} & \longrightarrow & \mathcal{A}_n \\ & A & \longmapsto & A - {}^tA \end{array}$$

Montrer que φ est une application linéaire surjective. En déduire la dimension de $\mathcal{A}_n$ et celle de l'espace des matrices symétriques.

Exercice 14 : (CCP)

Soit E un espace vectoriel de dimension n .

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $f^k = 0$.

a) Montrer que $f^n = 0$.(On traîtera d'abord le cas $k \leq n$ puis pour $k > n$, on montrera que la suite $(dim(kerf^i))_{i \in \mathbb{N}}$ est stationnaire).

b) Etablir l'existence d'un plus petit entier $p \leq n$ tel que $f^p = 0$.

2. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$.

a) Montrer qu'il existe une base B de E telle que :

$$Mat_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

b) Si on note A la matrice précédente, résoudre l'équation $X^2 = A$