Rappels d'Algèbre Linéaire de P.C.S.I

Table des matières

Vous trouverez ici les rappels sur les principaux outils d'algèbre linéaire vus en 1ère année avec des méthodes pour la résolution d'exercices types.

Dans tout le chapitre, $I\!K$ désigne le corps $\boldsymbol{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Structure d'espace vectoriel sur $I\!K$

1.1 Définition et règles de calcul

Définition 1 : On appelle, *espace vectoriel sur* $I\!K$ ou $I\!K$*-espace vectoriel* (en abrégé $I\!K$-e.v), un ensemble E non vide et muni :

1) d'une loi de composition interne, notée $+$, telle que $(E,+)$ soit un groupe abélien. Cette loi est appelée *addition de* E et son élément neutre est noté 0_E.

2) d'une loi de composition externe, (application de $I\!K \times E$ dans E), appelée *multiplication par un scalaire*, notée $(\lambda, x) \longmapsto \lambda \cdot x$ et possédant les propriétés suivantes :

i) $\forall(\lambda,\mu) \in I\!K^2,\ \forall x \in E,\ (\lambda+\mu)\cdot x = \lambda\cdot x + \mu\cdot x$
ii) $\forall \lambda \in I\!K,\ \forall (x,y) \in E^2,\ \lambda\cdot(x+y) = \lambda\cdot x + \lambda\cdot y$
iii) $\forall(\lambda,\mu) \in I\!K^2,\ \forall x \in E,\ (\lambda\cdot\mu)\cdot x = \lambda\cdot(\mu\cdot x)$
iv) $\forall x \in E,\ 1\cdot x = x$

Tout élément de E est appelé *vecteur* de l'e.v.
Tout élément de $I\!K$ est appelé *scalaire*.

Propriété 1 : **Règles de calcul**

Soit $(E,+,\cdot)$ un $I\!K$-e.v.
1) $\forall \lambda \in I\!K,\ \forall x \in E,\ 0\cdot x = 0_E, \lambda\cdot 0_E = 0_E$.
2) $\forall \lambda \in I\!K,\ \forall x \in E,\ \lambda\cdot x = 0_E \iff \lambda = 0$ ou $x = 0_E)$.
3) $\forall \lambda \in I\!K,\ \forall x \in E,\ (-\lambda)\cdot x = \lambda\cdot(-x) = -(\lambda\cdot x)$.
4) $\forall(\lambda,\mu) \in I\!K^2,\ \forall (x,y) \in E^2,\ \ \lambda\cdot(x-y) = \lambda\cdot x - \lambda\cdot y$
$(\lambda-\mu)\cdot x = \lambda\cdot x - \mu\cdot x$

1.2 Exemples de référence

1) $(\boldsymbol{R},+,\cdot)$ est un $\boldsymbol{R}$-e.v.
2) $(\mathbb{C},+,\cdot)$ est un $\mathbb{C}$-e.v et un $\boldsymbol{R}$-e.v.
3) L'ensemble des vecteurs du plan (resp : de l'espace) est un $\boldsymbol{R}$-e.v.
4) Soit A un ensemble quelconque, non vide.

Soit E un $I\!K$-e.v.

Soit $\mathcal{F}(A,E)$, l'ensemble des applications de A dans E. On munit cet ensemble des deux lois suivantes :

$\forall (f,g) \in \mathcal{F}(A,E)^2$,

$$\begin{array}{rccl} f+g: & A & \longrightarrow & E \\ & x & \longmapsto & (f+g)(x) = f(x)+g(x) \end{array}$$

$\forall f \in \mathcal{F}(A,E),\ \forall \lambda \in I\!K,$

$$\begin{array}{rccl} \lambda \cdot f : & A & \longrightarrow & E \\ & x & \longmapsto & (\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x) \end{array}$$

On vérifie que $\mathcal{F}(A, E)$ est un $I\!K$-e.v
Applications :
i) $\mathcal{F}(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R})$ est un $\boldsymbol{R}$-e.v.
ii) Soit I un intervalle de $\boldsymbol{R}$. $\mathcal{F}(I, \boldsymbol{R})$ est un $\boldsymbol{R}$-e.v et $\mathcal{F}(I, \mathbb{C})$ est un $\mathbb{C}$-e.v.
iii) L'ensemble des suites réelles (resp : complexes) est un $\boldsymbol{R}$-e.v (resp : $\mathbb{C}$-e.v).
5) L'ensemble des polynômes .

1.3 Espace vectoriel produit

Soient $(E_1, E_2, \cdots, E_n)$ n $I\!K$-e.v.
Posons $E = E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$
Sur E, on définit :
a) une addition :

$$(x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots, x_n) + (y_1, y_2, \cdots, y_i, \cdots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_i + y_i, \cdots, x_n + y_n)$$

b) une multiplication externe :

$$\lambda \cdot (x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots, x_n) = (\lambda \cdot x_1, \lambda \cdot x_2, \cdots, \lambda \cdot x_i, \cdots, \lambda \cdot x_n)$$

Muni de ces deux lois, E est un $I\!K$-e.v.
En particulier :
Si tous les E_i sont $\boldsymbol{R}$, on obtient : $\forall n \in I\!N^*, \boldsymbol{R}^n$ est un $\boldsymbol{R}$-e.v.
Si si tous les E_i sont $\mathbb{C}$, on obtient : $\forall n \in I\!N^*, \mathbb{C}^n$ est un $\mathbb{C}$-e.v (donc aussi un $\boldsymbol{R}$-e.v).

1.4 Sous-espaces vectoriels

Dans ce paragraphe, E désigne un $I\!K$-e.v.

1.4.1 Définition-Caractérisation

Définition 2 : Une partie F de E est appelée *sous-espace vectoriel de* E (en abrégé s.e.v de E) lorsque :
1) $F \neq \emptyset$.
2) F est stable pour l'addition de E, c'est-à-dire :

$$\forall (x, y) \in F^2, x + y \in F$$

3) F est stable pour la multiplication externe de E, c'est-à-dire :

$$\forall \lambda \in I\!K, \forall x \in F, \lambda \cdot x \in F$$

Propriété 2 : Etant donné un sous espace vectoriel F de E, F muni des lois $+$ et $\cdot$ de E (appelées lois induites) devient un $I\!K$-e.v

Méthode :*Ainsi, pour démontrer qu'un ensemble F est un $I\!K$-e.v, il sera plus simple de démontrer qu'il est s.e.v d'un $I\!K$-e.v déjà connu.*

Propriété 3 : **Caractérisation d'un s.e.v**.

F est un s.e.v de E si et seulement si :

1) $F \subset E$

2) $F \neq \emptyset$ $(0_E \in F)$

3) $\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall(x, y) \in F^2,\ \lambda x + \mu y \in F$

Méthode :

1. C'est LA propriété qu'on utilise la plupart du temps pour démontrer qu'un ensemble est un s.e.v d'un $\mathbb{K}$-e.v donné, et donc aussi un $\mathbb{K}$-e.v.(ex : Pour montrer que $C^0(I, \mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-e.v, on montre en utilisant la caractérisation que c'est un s.e.v de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$).

2. $0_E \notin F \Longleftarrow F$n'estpasuns.e.v *(ex : $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2/x + 3y = 1\}$).*

1.4.2 Sous espace vectoriel engendré par une partie

Propriété 4 : Une intersection de sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E.

Propriété 5- Définition 3 : Soit A une partie de E. Il existe un plus petit sous-espace vectoriel contenant A. On l'appelle *sous-espace vectoriel engendré par* A et on le note $\mathrm{Vect}(A)$.

Propriété 6 : Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = \{a_1, \cdots, a_n\}$ une partie finie de E.

$\mathrm{Vect}(A)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $a_1, \cdots, a_n$ i.e

$$\mathrm{Vect}(A) = \{x \in E/\exists(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n,\ x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k\}$$

1.4.3 Somme de deux sous-espaces vectoriels

Propriété 7- Définition 4 : Soit F et G deux s.e.v de E.

On note : $F + G = \{x \in E/\exists(y, z) \in F \times G, x = y + z\}$

$F + G$ est un s.e.v de E, appelé *somme de F et G*.

1.4.4 Sous-espaces vectoriels supplémentaires

Propriété 8- Définition 5 : Soit F et G deux s.e.v de E.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $\forall x \in E, \exists!(y, z) \in F \times G, x = y + z$

(ii) $E = F + G$ et $F \cap G = \{0\}$.

Lorsque ces propriétés sont vérifiées, on dit que F et G sont *supplémentaires dans E* et on écrit $E = F \oplus G$.

Méthode pour démontrer $E = F \oplus G$:

1. Si l'énoncé ne le précise pas, il faut montrer que F et G sont deux s.e.v de E.

2. On montre $F \cap G = \{0\}$.

3. On montre $E = F + G$ par double inclusion.

Pour $F + G \subset E$, c'est par définition de $F + G$.

Pour $E \subset F + G$, on procède par analyse-synthèse, c'est-à dire :

a) Analyse : on se donne x de E, et on suppose qu'il existe y et z tels que $x = y + z$: on cherche alors à les déterminer en fonction des données du problème.

b) Synthèse : une fois trouvés y et z, on s'assure que $y \in F$, $z \in G$ et $y + z = x$.

1.5 Applications linéaires

Dans ce paragraphe, E et F sont deux $I\!K$-e.v (même $I\!K$ pour les deux).

1.5.1 Définitions - Exemples

Définition 6 : Soit f une application de E dans F.
1) f est appelée *application linéaire* lorsque :
- $\forall (x,y) \in E \times E,\ f(x+y) = f(x) + f(y)$
- et $\forall \lambda \in I\!K,\ \forall x \in E,\ f(\lambda\, x) = \lambda\, f(x)$

2) Un *isomorphisme d'espaces vectoriels* est une application linéaire bijective.
On dit que E est isomorphe à F lorsqu'il existe un isomorphisme f de E dans F.
On note alors $E \simeq F$.
3) Un *endomorphisme* de E est une application linéaire de E dans E.
4) Un *automorphisme* est un endomorphime bijectif.
5) Une *forme linéaire* sur E est une application linéaire de E sur $I\!K$ (E étant un $\mathbb{K}$-e.v).

Notations :
On note par $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F, et par $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.

Remarque : $\forall f \in \mathcal{L}(E,F),\ f(0_E) = 0_F$.

Propriété 9 : *Caractérisation d'une application linéaire.*
Une application f de E dans F est linéaire si et seulement si

$$\forall (x,y) \in E \times E,\ \forall (\lambda,\mu) \in I\!K \times I\!K,\ f(\lambda\, x + \mu\, y) = \lambda\, f(x) + \mu\, f(y)$$

1.5.2 Noyau - Image

Propriété 10 : Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.
1) Pour tout s.e.v F_1 de F, $f^{-1}(F_1)$ est un s.e.v de E.
2) Pour tout s.e.v E_1 de E, $f(E_1)$ est un s.e.v de F.

Définition 7 : Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.
On appelle :
noyau de f : le s.e.v de E, noté $\mathrm{Ker}(f)$, défini par

$$\ker f = f^{-1}(\{0_F\}) = \{x \in E / f(x) = 0_F\}$$

image de f : le s.e.v de F, noté $\mathrm{Im}(f)$, défini par

$$\mathrm{Im}\ f = f(E) = \{y \in F / \exists x \in E,\ y = f(x)\} = \{f(x) / x \in E\}$$

Méthode *: Pour montrer qu'un ensemble E_1 est un s.e.v de E, on peut le présenter comme le noyau d'une application linéaire : c'est souvent le cas lorsque H est défini par une (ou des) équation(s) : $H = \{x \in E/\varphi(x) = 0\}$ où φ s'avère être une application linéaire et on le vérifie par la carctérisation ,à moins que cela n'ait été déjà mentionné dans l'exercice.*

Propriété 11 : Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.

f injective $\Longleftrightarrow$ $\ker f = \{0_E\}$

f surjective $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Im}\ f = F$

1.5.3 Opérations sur les applications linéaires

Propriété 12 : Soient E et F deux $I\!K$-e.v.

$\mathcal{L}(E,F)$ est un $I\!K$ espace vectoriel pour l'addition et la multiplication par un scalaire des applications.

Propriété 13 : Soient E, F, G trois $I\!K$-e.v.

On a : $\forall (f_1, f_2) \in \mathcal{L}(E,F)^2,\ \forall (g_1, g_2) \in \mathcal{L}(F,G)^2,\ \forall \alpha \in I\!K,$

$g_1 \circ f_1 \in \mathcal{L}(E,G)$

$g_1 \circ (f_1 + f_2) = g_1 \circ f_1 + g_1 \circ f_2$

$(g_1 + g_2) \circ f_1 = g_1 \circ f_1 + g_2 \circ f_1$

$(\alpha\, g_1) \circ f_1 = g_1 \circ (\alpha\, f_1) = \alpha\, (g_1 \circ f_1)$

Corollaire : $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ est un anneau.

On peut alors écrire dans cet anneau la formule du binôme de Newton :

$$\forall (f,g) \in \mathcal{L}(E)^2,\ \text{tel que } f \circ g = g \circ f, \forall n \in I\!N,\ (f+g)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^k g^{n-k}$$

où f^n désigne la composée de f n fois et $f^0 = \mathrm{Id}_E$.

Propriété 14 : Soient E et F deux $I\!K$-e.v, $f \in \mathcal{L}(E,F)$.

Si f est un isomorphisme de E dans F, alors f^{-1} est un isomorphisme de F dans E.

Corollaire - Définition 8 : L'ensemble des automorphismes d'un $I\!K$-e.v E muni de la loi de composition est un groupe, appelé *groupe linéaire de* E, noté $GL(E)$.

Exemple : $\forall \lambda \in I\!K^*,\ \lambda\, Id_E \in GL(E)$.

1.5.4 Etude d'endomorphismes particuliers : Projecteurs et Symétries

Soit E un $I\!K$-e.v.

On considère **deux sous-espaces vectoriels supplémentaires** F **et** G **de** E. On a $E = F \oplus G$.

On rappelle qu'alors :

$$(\star)\ \forall x \in E,\ \exists ! (y,z) \in F \times G,\ x = y + z$$

On appelle **projecteur sur F parallèlement à G** (resp :**projecteur sur G parallèlement à F**), l' application suivante :

$$\begin{array}{rccc} p: & E & \longrightarrow & E \\ & x & \longmapsto & y \text{ défini par } (\star) \end{array}$$

resp :

$$\begin{array}{rccc} q: & E & \longrightarrow & E \\ & x & \longmapsto & z \text{ défini par } (\star) \end{array}$$

Propriétés de p et q :

1) p et q sont des endomorphismes de E et $p + q = \mathrm{Id}_E$

2) $\ker(p) = G,\ \mathrm{Im}(p) = F,\ \ker(q) = F,\ \mathrm{Im}(q) = G$
3) $\ker(p) \oplus \mathrm{Im}(p) = E,\ \ \ker(q) \oplus \mathrm{Im}(q) = E$
4) $p \circ p = p,\ q \circ q = q$

Plus généralement :
Définition 9 : Soit E un $I\!K - e.v.$
On appelle *projecteur de E* tout endomorphisme p de E tel que : $p \circ p = p$

Propriété 15 : Soit p un projecteur de E.
Alors
– $\mathrm{Im}\, p \oplus \ker p = E$.
Ainsi, p est le projecteur sur $\mathrm{Im}\, p$ parallèlement à $\ker p$.
– $\forall x \in E, x = \underbrace{(x - p(x))}_{\in \ker p} + \underbrace{p(x)}_{\in \mathrm{Im}\, p}$.
– $\forall y \in \mathrm{Im}\, p,\ p(y) = y$.
– $\mathrm{Id}_E - p$ est un projecteur appelé projecteur associé à p.

Propriété 16 : Soit p un projecteur de E.
On pose $s = 2\,p - \mathrm{Id}_E$.
Pour tout $x \in E$, on pose $x = x_1 + x_2$ où $x_1 \in \mathrm{Im}\, p$ et $x_2 \in \ker p$.
Alors
1) $s(x) = x_1 - x_2$ c'est à dire que s **est la symétrie par rapport à Im p parallèlement à ker p.**
2) $s \circ s = \mathrm{Id}_E$ ie s est un automorphisme et $s^{-1} = s$ ($s \in GL(E)$).
3) $\ker(s - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Im}\, p$ et $\ker(s + \mathrm{Id}_E) = \ker p$

2 Espaces vectoriels de dimension finie

2.1 Familles libres-liées

Définition 10 Soit $(v_1, v_2, \cdots, v_p)$ une famille finie de vecteurs d'un $I\!K$-e.v E.
On dit que cette famille est libre (ou encore que les vecteurs $(v_1, v_2, \cdots, v_p)$ sont linéairement indépendants) lorsque :

$$\forall(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p) \in I\!K^p, \sum_{k=1}^{p} \lambda_i\, v_i = 0 \Longrightarrow \forall i, \lambda_i = 0$$

Une famille non libre est dite liée ou encore les vecteurs sont dits linéairement dépendants.
$(v_1, v_2, \cdots, v_p)$ est une famille liée lorsque :

$$\exists(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p) \in I\!K^p \text{non tous nuls tels que} \sum_{k=1}^{p} \lambda_i\, v_i = 0$$

Exemple : Toute famille finie de polynômes de degrés deux à deux distincts est libre.
Propriété 17
1. Une famille à un élément (x) est libre ssi $x \neq 0_E$.
2. Toute famille contenant 0_E est liée.
3. Toute sous-famille d'une famille libre est libre.
4. Toute sur-famille d'une famille liée est liée.
5. Une famille est liée ssi l'un au moins des vecteurs peut s'écrire comme combinaison linéaire des autres.

2.2 Familles génératrices

Définition 11 Soit $(v_1, v_2, \cdots, v_p)$ une famille finie de vecteurs d'un $I\!K$-e.v E.

On dit que cette famille est génératrice de E lorsque $E = \text{vect}(v_1, \cdots, v_p)$, c'est-à-dire que tout vecteur de E peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs $(v_1, v_2, \cdots, v_p)$.

On dit aussi que E est engendré par les vecteurs $(v_i)_{1\leq i\leq p}$.

Propriété 18 : Soient E et F deux $I\!K$-e.v et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
Si $(v_i)_{1\leq i\leq p}$ est une famille génératrice de E, alors $(f(v_i))_{1\leq i\leq p}$ est une famille génératrice de $\text{Im} f$.

2.3 Bases

Définition 12 : On appelle, base de E, toute famille libre et génératrice.

Théorème 1-Définition 13 :

Soit un $I\!K$-e.v E admettant une base finie $(e_i)_{1\leq i\leq n}$.

Pour tout $x \in E$, il existe une famille et une seule $(\lambda_i)_{1\leq i\leq n}$ de scalaires $(\lambda_i \in I\!K)$ tels que : $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$.
On appelle cette famille de scalaires *coordonnées (ou composantes) de x dans la base* $(e_i)_{1\leq i\leq n}$.

Propriété 19 : Caractérisation d'une application linéaire par les images des vecteurs d'une base.

Soient E et F deux $I\!K$-e.v et $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ une base finie de E. Soit une famille $(v_i)_{1\leq i\leq n}$ de vecteurs de F.

Alors, il existe une et une seule application linéaire φ de E dans F telle que $\forall i \in \{1 \cdots n\}$, $\varphi(e_i) = v_i$.

De plus,

1. $\text{Im}\varphi = \text{vect}((varphi(e_i))_{1\leq i\leq n})$.
2. φ est un isomorphisme si et seulement si $(v_i)_{1\leq i\leq n}$ est une base de F.

Corollaire

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E, G)$ et $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ une base finie de E.

$$f = 0 \iff \forall i, f(e_i) = 0$$

2. Soit $(f, g) \in \mathcal{L}(E, G)^2$ et $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ une base finie de E.

$$f = g \iff \forall i, f(e_i) = g(e_i)$$

2.4 Espaces vectoriels de dimension finie

2.4.1 Définition

Définition 14 : On dit que E est un espace vectoriel de dimension finie, s'il admet une famille génératrice finie. Dans le cas contraire, on dit que E est de dimension infinie.

Ex : $E = vect(u, v, w)$ est de dimension finie car (u, v, w) en est une famille génératrice finie par définition du vect.

2.4.2 Existence de bases

Propriété 20 : Soit E est un espace vectoriel de dimension finie et G une famille génératrice finie de E. Toute famille libre contenue dans G peut, à l'aide d'éléments de G, être complétée en une base de E.

Corollaire : Tout espace vectoriel de dimension finie admet une base finie. De plus, cette base peut être extraîte de n'importe quelle famille génératrice finie.

2.4.3 Dimension

Théorème 2 : Si E est un espace vectoriel de dimension finie, toutes les bases de E ont le même nombre d'éléments. Ce nombre est appelé *dimension de E sur $\mathbb{K}$*, noté $\dim\limits_{\mathbb{K}} E$.

Exemples :
1. L'espace vectoriel $\{0\}$ est de dimesion 0 car la seule famille libre est la famille vide qui est alors la seule base de E.
2. $\mathbb{K}$ est de dimension 1 sur $\mathbb{K}$ avec comme base (1).
3. $\mathbb{C}$ est de dimension 2 sur $\mathbb{R}$: il admet pour base $(1, i)$.
4. $\mathbb{K}^n$ est de dimension n sur $\mathbb{K}$ avec comme base appelée *base canonique*$(e_i)_{1\leq i\leq n}$ où $e_i = (0, 0, \cdots, \underset{\text{ième coordonnée}}{1}, 0, \cdots, 0)$.
5. $\mathbb{K}_n[X]$ est de dimension $n+1$ et la base dite canonique est $(X^i)_{0\leq i\leq n}$.

Propriété 21 : Si E est un espace vectoriel de dimension finie et de dimension n, alors :
1. Toute famille libre a au maximum n vecteurs.
2. Toute famille génétracice a au minimum n vecteurs.

2.4.4 Théorème de la base incomplète

Théorème de la base incomplète : Toute famille libre d'un espace vectoriel E de dimension finie peut être complétée en une base de E.

En pratique, on connaît la dimension n de E, puis on choisit une base de E, souvent la canonique. On complète alors la famille libre avec des vecteurs de la base pour obtenir une famille libre avec n vecteurs qui sera alors une base au vu de la propriété suivante

Propriété 22 : Soit B une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E de dimension n. Les propositions suivantes sont équivalentes :
(i) B est une base.
(ii) B est une famille libre à n vecteurs (dite famille libre maximale).
(iii) B est une famille génératrice à n vecteurs (dite famille génératrice minimale).

2.5 Dimension des sous-espaces vectoriels

Propriété 23 :
Soit E un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie et F un s.e.v de E.
Alors F est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie et $\dim_{\mathbb{K}} F \leq \dim_{\mathbb{K}} E$.
De plus, $\dim_{\mathbb{K}} F = \dim_{\mathbb{K}} E \Longleftrightarrow E = F$.

Méthode :*Pour démontrer que deux espaces vectoriels* **de dimension finie** *sont égaux, il suffit de montrer une inclusion et l'égalité de leurs dimensions.*

Propriété 24 : Sous espace vectoriel supplémentaire en dimension finie.

1. Tout sous espace vectoriel d'un $I\!K$-e.v de dimension finie E admet un supplémentaire dans E.

2. Si $E = F \oplus G$, alors $\dim_{I\!K} F + \dim_{I\!K} G = \dim_{I\!K} E$.

Complément : Pour trouver un supplémentaire d'un s.e.v F de E, on complète une base de F en une base de E et le s.e.v engendré par les vecteurs complétés constitue un supplémentaire de F dans E.

Propriété 25 : Formule de Grassmann

Etant donnés des s.e.v F et G d'un $I\!K$-e.v de dimension finie E , on a :

$$\dim_{I\!K} F + G = \dim_{I\!K} F + \dim_{I\!K} G - \dim_{I\!K} F \cap G$$

Corollaire :Etant donnés des s.e.v F et G d'un $I\!K$-e.v de dimension finie E , on a :

$$F \oplus G = E \iff F \cap G = \{0\} \text{ et } \dim_{I\!K} F + \dim_{I\!K} G = \dim_{I\!K} E$$

$$F \oplus G = E \iff F + G = E \text{ et } \dim_{I\!K} F + \dim_{I\!K} G = \dim_{I\!K} E$$

2.6 Relation entre les dimensions

2.6.1 Dimension et isomorphisme

Propriété 26 :Soient E et F deux $I\!K$-e.v de dimension finie.

E et F sont isomorphes si et seulement si ils ont même dimension.

2.6.2 Dimension d'un produit de s.e.v

Propriété 27 :

Soient $(E_1, E_2, \cdots, E_p)$ des $I\!K$-e.v de dimension finie.

Alors $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p$ est un $I\!K$-e.v de dimension finie et

$$\dim_{I\!K} E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p = \sum_{i=1}^{p} \dim_{I\!K} E_i$$

2.7 Rang d'une famille de vecteurs, d'une application linéaire

Définition 15 : Soient E et F deux $I\!K$-e.v, $(v_i)_{i\in I}$ une famille finie de vecteurs de E et f une application linéaire de E dans F.

On appelle *rang de* $(v_i)_{i\in I}$ la dimension de $\mathrm{vect}((v_i)_{i\in I})$ et on note $\mathrm{rg}((v_i)_{i\in I})$.

Si $\mathrm{Im}(f)$ est de dimension finie, on appelle *rang de* f la dimension de $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{rg}(f)$.

Théorème du rang : Soient E et F deux $I\!K$-e.v et f une application linéaire de E dans F.

On suppose E de dimension finie.

Alors,

Tout supplémentaire de $\mathrm{Ker} f$ est isomorphe à $\mathrm{Im} f$.

Et

$$\dim_{I\!K} E = \dim_{I\!K} \mathrm{Ker} f + \dim_{I\!K} \mathrm{Im} f$$

Complément : Si E est de dimension finie et $(e_i)_{i\in I}$ une base de E, alors $\mathrm{rg}(f) = \dim_{I\!K} \mathrm{vect}\ ((f(e_i)_{i\in I}))$.

Corollaire : Soient E et F deux $I\!K$-e.v de même dimension finie et f une application linéaire de E dans F.

f isomorphisme $\Longleftrightarrow$ f injective $\Longleftrightarrow$ f surjective $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{rg} f = \dim_{I\!K} F$

2.8 Hyperplans en dimension finie

Soit E un $I\!K$-e.v de dimension finie $n \geq 1$.

Propriété 28- Définition 16 : Si H est un s.e.v de E, les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) dim H=n-1.

(ii) il existe une droit vectorielle D telle que $E = H \oplus D$.

(iii) il existe une forme linéaire non nulle f telle que $H = ker f$.

On appelle *hyperplan de* E tout s.e.v de E vérifiant l'une de ces conditions.

Propriété 29 : Soit B une base de E. Une partie H de E est un hyperplan si et seulement si elle admet dans B une équation du type :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$$

où $a_1, a_2, \cdots, a_n$ sont des scalaires non tous nuls.

3 Calcul Matriciel

3.1 Définition d'une matrice

Soient $(n,p) \in I\!N^* \times I\!N^*$.

Définition 17 : On appelle *matrice à n lignes et p colonnes, à coefficients dans $I\!K$* toute application de $\{1..n\} \times \{1..p\}$ dans $I\!K$.

Une telle application

$$\begin{array}{rccc} A: & \{1..n\} \times \{1..p\} & \rightarrow & I\!K \\ & (i,j) & \longmapsto & A(i,j) = a_{ij} \end{array}$$

est notée sous la forme d'un tableau à n lignes et p colonnes

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$$

a_{ij} est appelé le $(i,j)^{\text{ime}}$ coefficient de A. Il est sur la $i^{ßme}$ligne et la $j^{ßme}$ colonne.

On dit que :

- A est une matrice carrée lorsque $n = p$ et alors A est dite matrice carrée d'ordre n. Dans ce cas,
  Les coefficients a_{ii} sont appelés coefficients diagonaux de A.
  A est dite matrice diagonale lorsque $\forall (i,j)\ i \neq j \Longrightarrow a_{ij} = 0$.
  A est dite matrice triangulaire supérieure lorsque $\forall (i,j)\ i > j \Longrightarrow a_{ij} = 0$.
  A est dite matrice triangulaire inférieure lorsque $\forall (i,j)\ i < j \Longrightarrow a_{ij} = 0$.
- A est une matrice colonne lorsque $p = 1$.
- A est une matrice ligne lorsque $n = 1$.

Notation :
$\mathcal{M}_{n,p}(I\!K)$ est l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes, à coefficients dans $I\!K$.
$\mathcal{M}_{n,p}(I\!K)$ est l'ensemble des matrices carrées d'ordre n , à coefficients dans $I\!K$.

3.2 Matrices et applications linéaires

3.2.1 Application linéaire canonique associée à une matrice

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(I\!K)$.

On lui associe une application linéaire f de $I\!K^p$ dans $I\!K^n$ en posant, $(e_j)_{1 \leq j \leq p}$ étant la base canonique de $I\!K^p$,

$$f(e_j) = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$$

vecteur exprimé dans la base canonique de $I\!K^n$.

f est alors définie de manière unique par ces vecteurs :

$$\forall x \in E,\ f(x) = \sum_{j=1}^{p} x_j f(e_j)$$

3.2.2 Matrice associée à un vecteur

Soit E un $I\!K$-e.v de dimension finie et $\dim E = n,\ B = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de E.
Soit $x \in E$.
On lui associe une matrice colonne formée par ses coordonnées dans B.

Propriété 30 : L'application

$$\begin{array}{rccc} Mat_B : & E & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(I\!K) \\ & x & \longmapsto & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \end{array}$$

est une bijection.

3.2.3 Matrice associée à une application linéaire

Soit E un $I\!K$-e.v de dimension p, $B_E = (e_j)_{1 \leq j \leq p}$ une base de E.
Soit F un $I\!K$-e.v de dimension n, $B_F = (f_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de F.
Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
On lui associe une matrice notée $Mat_{B_E,B_F}(f)$ telle que sa j^{ime} colonne corresponde aux coordonnées de $f(e_j)$ dans la base B_F.

Cas particuliers :

La matrice d'une forme linéaire (application linéaire de E dans $I\!K$) est une matrice ligne.

La matrice d'un endomorphisme de E est une matrice carrée.

3.3 Opérations sur les matrices

3.3.1 L'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,p}(I\!K)$

Soient $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(I\!K)$.

Définition 18 :
1. On définit la matrice $A + B$ de $\mathcal{M}_{n,p}(I\!K)$ par :

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$$

2. Soit $\lambda \in I\!K$.
On définit la matrice $\lambda\, A$ de $\mathcal{M}_{n,p}(I\!K)$ par :

$$\lambda\, A = (\lambda\, a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$$

.

Propriété 31 :
1. Avec cette addition et cette multiplication externe, $\mathcal{M}_{n,p}(I\!K)$ est un $I\!K$-e.v. L'élément neutre pour l'addition est la matrice, appelée matrice nulle dont tous les coeffs sont nuls.
2. Soit E un $I\!K$-e.v de dimension p, $B_E = (e_j)_{1 \leq j \leq p}$ une base de E.
Soit F un $I\!K$-e.v de dimension n, $B_F = (f_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de F.
L'application

$$\begin{array}{llll} Mat_{B_E,B_F} : & \mathcal{L}(E,F) & \to \mathcal{M}_{n,p}(I\!K) & \\ & f & \longmapsto & Mat_{B_E,B_F}(f) \end{array}$$

est un isomorphisme.

Propriété 32 :
Pour $(i,j) \in \{1..n\} \times \{1..p\}$, on note E_{ij} la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(I\!K)$ dont le $(i,j)^{ßme}$ coefficient vaut 1 et tous les autres sont nuls. Ces np matrices sont appelées *les matrices élémentaires de* $\mathcal{M}_{n,p}(I\!K)$.
1. $(E_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,p}(I\!K)$, appelée *base canonique*.
2. $\mathcal{M}_{n,p}(I\!K)$ est un $I\!K$-e.v de dimension finie et $\dim_{I\!K}\mathcal{M}_{n,p}(I\!K) = n\,p$.
3.Soit E un $I\!K$-e.v de dimension p et F un $I\!K$-e.v de dimension n.
Alors $\mathcal{L}(E,F)$ est un $I\!K$-e.v de dimension finie et $\dim_{I\!K}\mathcal{L}(E,F) = n\,p$.

3.3.2 Multiplication de matrices

Définition 19 : Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,\mathbf{p}}(I\!K)$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}} \in \mathcal{M}_{p,q}(I\!K)$.
On définit la matrice produit AB, appartenant à $\mathcal{M}_{\mathbf{n},\mathbf{q}}(I\!K)$, par $AB = (c_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq q}}$ où

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}\, b_{kj}$$

Remarques :
1. Revoir la pratique de ce produit matriciel.
2. En général $AB \neq BA$. Et d'ailleurs, il n'est pas toujours possible d'effectuer les deux produits matriciels (incompatibilité entre lignes et colonnes).

Propriété 33 : $\mathcal{M}_n(I\!K)$, muni de l'addition et du produit matriciel est un anneau, d'élément neutre pour le produit matriciel la matrice notée I_n, matrice diagonale dont tous les coeffs diagonaux valent 1.

En particulier, la formule du binôme de Newton s'applique :

$\forall n \in I\!N,\ \forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(I\!K)^2,$ tq $AB = BA$,

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} A^k B^{n-k}$$

où $A^0 = I_n$.

Propriété 34 : Soient E, F, G trois $I\!K$-e.v de dimension finie, de bases respectives B, C, D, $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$.

On a

$$Mat_{B,D}(g \circ f) = Mat_{C,D}(g) \cdot Mat_{B,C}(f)$$

Propriété 35 : Traduction matricielle d'une application linéaire.

Soient E, F deux$I\!K$-e.v de dimension finie, de bases respectives B, C, $f \in \mathcal{L}(E,F)$,$x \in E$, $y \in F$, $A = Mat_{B,C}(f)$, $X = Mat_B(x)$, $Y = Mat_C(y)$.

Alors,

$$y = f(x) \Longleftrightarrow Y = AX$$

3.3.3 Transposition d'une matrice

Définition 20 : On appelle *transposée d'une matrice* $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(I\!K)$, la matrice notée ${}^tA = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{M}_{\mathbf{p,n}}(I\!K)$ où $b_{ij} = a_{ji}$.

Définition 21 : Soit A une matrice **carrée**.

On dit qu'elle est symétrique lorsque $A =^t A$.

On dit qu'elle est antisymétrique lorsque $A = -{}^tA$.

On note par $S_n(I\!K)$ l'ensemble des matrices symétriques d'ordre n.

2. On dit que A est antisymétrique lorsque $A = -{}^tA$ c'est-à-dire $\forall (i,j), a_{ij} = -a_{ji}$.

On note par $A_n(I\!K)$ l'ensemble des matrices antisymétriques d'ordre n.

Propriété 36 : $S_n(I\!K)$ et $A_n(I\!K)$ sont des sous espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{M}_n(I\!K)$.

Propriété 37 :

1. L'application

$$\begin{array}{rccc} \Psi : & \mathcal{M}_{n,p}(I\!K) & \rightarrow & \mathcal{M}_{p,n}(I\!K) \\ & A & \longmapsto & {}^tA \end{array}$$

est un isomorphisme.

2. ${}^t(AB) =^t B^tA$.

3.4 Matrices inversibles - Le groupe linéaire

Définition 22 : Une matrice carrée A d'ordre n est dite *inversible* lorsqu'il existe une matrice carrée B d'ordre n telle que : $AB = BA = I_n$.

B est alors appelée *inverse de* A, notée A^{-1}.

Exemple : I_n est inversible d'inverse I_n.

Propriété 38 :

1. A est inversible ssi il existe une matrice carrée B d'ordre n telle que : $AB = I_n$.

2. Une matrice A inversible d'ordre n est associée à un automorphisme f d'un $I\!K$-e.v de dim n et on a : $A^{-1} = Mat_B(f^{-1})$.

3. Soit $GL_n(I\!K)$ l'ensemble des matrices inversibles d'ordre n.

$GL_n(I\!K)$ muni du produit matriciel est un groupe, appelé *groupe linéaire d'ordre* n, isomorphe au groupe linéaire de tout $I\!K$-e.v E.

4. $\forall (A,B) \in GL_n(I\!K)^2,\ A\,B \in GL_n(I\!K)$ et $(A\,B)^{-1} = B^{-1}\,A^{-1}$.

5. $\forall A \in GL_n(I\!K),\ {}^tA \in GL_n(I\!K)$ et $({}^tA)^{-1} = {}^t A^{-1}$.

Méthode pratique pour déterminer A^{-1} en utilisant les systèmes linéaires :

On utilise la relation $AX = Y \iff X = A^{-1}Y$ de la façon suivante :

1. On écrit $AX = Y$ sous forme de système linéaire en posant $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ puis $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

2. On exprime chaque x_i en fonction des $y_j, 1 \leq j \leq n$.

3. On écrit ce nouveau système linéaire sous forme matricielle : $X = BY$.

4. Alors $B = A^{-1}$.

Propriété 39 :

1. Une matrice diagonale A est inversible ssi ses coefficients diagonaux sont tous non nuls et la matrice inverse est alors la matrice diagonale dont les coeffs diagonaux sont les inverses des coeffs diagonaux de A.

2. Une matrice triangulaire est inversible ssi ses coefficients diagonaux sont tous non nuls.

3.5 Changement de bases

3.5.1 Matrices de passage

Définition 23 : Soient E un $I\!K$-e.v de dimension finie n, B et B' deux bases de E.

On appelle *matrice de passage de* B *à* B', notée $P_{B,B'}$ la matrice carrée d'ordre n dont les colonnes sont formées des composantes des vecteurs de B' dans la base B.

Propriété 40 : Soient E un $I\!K$-e.v de dimension finie n, B, B' et B'' des bases de E.

1. $P_{B,B'} = Mat_{B',B}(Id_E)$.

2. $P_{B,B''} = P_{B,B'} \cdot P_{B',B''}$.

3. $P_{B,B'} \in GL_n(I\!K)$ et $(P_{B,B'})^{-1} = P_{B',B}$

3.5.2 Changement de bases pour un vecteur

Propriété 41 : Soient E un $I\!K$-e.v de dimension finie n, B, B' des bases de E, $x \in E$, $P = P_{B,B'}$, $X = Mat_B(x)$, $X' = Mat_{B'}(x)$.

On a la relation matricielle

$$X = P\,X'$$

3.5.3 Changement de bases pour une application linéaire

Propriété 42 : Soient E et F deux $I\!K$-e.v de dimension finie , B_E, B'_E des bases de E, B_F, B'_F des bases de F, $f \in \mathcal{L}(E,F)$, $A = Mat_{B_E,B_F}(f), A' = Mat_{B'_E,B'_F}(f)$, $P = P_{B_E,B'_E}$, $Q = P_{B_F,B'_F}$.

Alors, on a la relation matricielle

$$A' = Q^{-1}\,A\,P$$

3.6 Rang d'une matrice

Définition 24 : Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(I\!K)$.

On appelle *rang de la matrice* A et on note rg(A) le rang de la famille de ses vecteurs colonnes.

Propriété 43 : Soient E et F deux $I\!K$-e.v de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Pour toute matrice A associée à f, on a rg(A)=rg(f)

Propriété 44 : Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(I\!K)$.

1. rg(A)$\leq$ min(n, p)
2. Si $n = p$
A inversible ssi rg(A)=n
3. $\forall P \in GL_n(I\!K)$ $\text{rg}(PA) = \text{rg}(A)$.
4. $\forall P \in GL_p(I\!K)$ $\text{rg}(AP) = \text{rg}(A)$.
5. $\text{rg}({}^tA) = \text{rg}(A)$. Autrement dit, le rang d'une matrice est le rang du système de ses vecteurs colonnes ainsi que celui du système de ses vecteurs lignes.

3.7 Opérations élémentaires sur les matrices

3.7.1 Définition et interprétation matricielle

Définition 25 : Soient (n, p) des entiers supérieurs ou égaux à 2 et $A \in \mathcal{M}_{n,p}(I\!K)$.

Pour $(i, j) \in I\!N^2$, on note L_i, la i^{ime} ligne de A et C_j, la j^{ime} colonne de A.

On appelle *opérations élémentaires sur les colonnes (resp : lignes)* de A, les opérations suivantes :

1. Un échange entre deux colonnes (resp : deux lignes).
2. Le remplacement d'une colonne C_r (resp : de la ligne L_r) par la colonne $C_r + \lambda\,C_s$ (resp : par la ligne $L_r + \lambda\,L_s$), où $(r, s) \in I\!N^2$, $r \neq s, \lambda \in I\!K$.
3. Le remplacement d'une colonne C_r (resp : de la ligne L_r) par la colonne $\lambda\,C_r$ (resp : par la ligne $\lambda\,L_r$), où $\lambda \in I\!K^*$.

Remarque : Faire des opérations élémentaires sur les colonnes de A revient à faire des opérations élémentaires sur les lignes de ${}^tA$.

Propriété 45 : Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(I\!K)$, $(r,s) \in I\!N^2,\ r < s$.

1. Echanger les colonnes C_r et C_s de A revient à multiplier A à droite par la matrice $P_{rs} = (p_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq p}}$ telle que :$\forall i \notin \{r,s\},\ p_{ii} = 1,\ p_{rs} = p_{sr} = 1\ p_{ij} = 0$ sinon.

2. Echanger les lignes L_r et L_s de A revient à multiplier A à gauche par la matrice $Q_{rs} = (q_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ telle que : $\forall i \notin \{r,s\},\ q_{ii} = 1,\ q_{rs} = q_{sr} = 1\ q_{ij} = 0$ sinon.

3. Remplacer une colonne C_r par la colonne $C_r + \lambda\, C_s$, où $(r,s) \in I\!N^2,\ r \neq s, \lambda \in I\!K$ revient à multiplier A à droite par la matrice $P_{rs\lambda} = I_p + \lambda\, E_{rs}$ où E_{rs} est une matrice élémentaire de $\mathcal{M}_p(I\!K)$.

4. Remplacer une ligne L_r par la ligne $L_r + \lambda\, L_s$, où $(r,s) \in I\!N^2,\ r \neq s, \lambda \in I\!K$ revient à multiplier A à gauche par la matrice $Q_{rs\lambda} = I_n + \lambda\, E_{rs}$ où E_{rs} est une matrice élémentaire de $\mathcal{M}_n(I\!K)$.

5. Remplacer une colonne C_r par la colonne $\lambda\, C_r$, où $\lambda \in I\!K^*$ revient à multiplier A à droite par la matrice diagonale d'ordre p dont tous les coeffs diagonaux valent 1 sauf le r^{ime} qui vaut λ.

6. Remplacer une ligne L_r par la ligne $\lambda\, L_r$, où $\lambda \in I\!K$ revient à multiplier A à gauche par la matrice diagonale d'ordre n dont tous les coeffs diagonaux valent 1 sauf le r^{ime} qui vaut λ.

Corollaire : Les opérations élémentaires sur A transforment A en une matrice de même rang que A.

3.7.2 Application au calcul du rang : La méthode de Gauss

Soit $A \in \mathcal{M}_{np}(I\!K)$.

Il s'agit par des opérations élémentaires transformer A en une matrice triangulaire (non forcément carrée) de même rang que A. L'intérêt vient du fait qu'il est simple de trouver le rang d'une matrice triangulaire.

On procède de la façon suivante :

- Si la première ligne de A est nulle, la matrice obtenue en supprimant cette ligne est de même rang que A. On supprime donc cette ligne.
- Par permutations de colonnes, on se ramène à une matrice de même rang que A et dont le $(1,1)^{ime}$ coeff α_1 est non nul.
- En multipliant la première colonne par $\dfrac{1}{\alpha_1}$, on se ramène à une matrice A_1 de même rang que A avec $a_{11}^1 = 1$.
- Pour $j \in \{2, \cdots, p\}$, le remplacement de C_j par $C_j - \alpha_{1j} C_1$ fait apparaître une matrice A_2 de même rang que A avec une première ligne de la forme $(1, 0, \cdots, 0)$.
- On recommence le même processus avec la sous-matrice de A_2 obtenue en lui enlevant sa première ligne et première colonne.

On arrive par cette méthode à trouver une matrice T de la forme

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ * & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & 1 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

3.7.3 Application au calcul de l'inverse d'une matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_n(I\!\!K)$.

Si A est inversible, par transformations élémentaires sur les colonnes (resp : lignes), on ramène A à une matrice triangulaire carrée d'ordre n.

En continuant les opérations élémentaires sur les colonnes (resp : lignes), on peut transformer A en I_n.

On obtient le schéma suivant :

Au départ : $A\,I_n = A$

Par transformations sur les colonnes : $A\,I_n\,P_1\,P_2, \cdots P_q = I_n$ où les matrices P_j sont les matrices qui interprètent les opérations élémentaires sur les colonnes.

En conclusion, ce schéma montre que $A^{-1} = I_n\,P_1\,P_2, \cdots P_q$, matrice qu'on obtient progressivement en répétant l'opération faite sur A, sur la matrice I_n.

4 Systèmes d'équations linéaires

4.1 Définition - Les différentes interprétations

Définition 26 : On appelle *système de n équations linéaires à p inconnues à coefficients dans* $I\!\!K$, tout système (L) de la forme :

$$\left\{\begin{array}{c} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \cdots + a_{1p}\,x_p = b_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \cdots + a_{2p}\,x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}\,x_1 + a_{n2}\,x_2 + \cdots + a_{np}\,x_p = b_n \end{array}\right.$$

Les coefficients a_{ij} et b_i sont des éléments donnés de $I\!\!K$.
Les inconnues $x_1, x_2, \cdots, x_p$ sont à chercher dans $I\!\!K$.
On associe à (L) le système homogène (H), obtenu en remplaçant les b_i par 0.
On note par $S(H) = \{(x_1, \cdots, x_p) \in I\!\!K^p / (x_1, \cdots, x_p)$ solution de $(H)\}$ et par $S(L) = \{(x_1, \cdots, x_p) \in I\!\!K^p / (x_1, \cdots, x_p)$ solution de $(L)\}$.

Interprétation matricielle :

En notant

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}, \ A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}, \ B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

(L) s'écrit $AX = B$ et (H) s'écrit $AX = 0$.

D'autre part, si f est l'application linéaire canoniquement associée à A, $f \in \mathcal{L}(I\!\!K^p, I\!\!K^n)$, $x \in I\!\!K^p$ un vecteur de composantes le vecteur colonne X dans la base canonique de $I\!\!K^p$ et $b \in I\!\!K^n$ un vecteur de composantes le vecteur colonne B dans la base canonique de $I\!\!K^n$, on peut écrire :

$$S(L) = \{x \in I\!\!K^p / f(x) = b\}$$

$$S(H) = \{x \in I\!\!K^p / f(x) = 0\} = \mathrm{Ker} f$$

Interprétation vectorielle :

En désignant par $(C_1, C_2, \cdots, C_p)$ les colonnes de A, on peut écrire (L) sous la forme

$$x_1\,C_1 + x_2\,C_2 + \cdots + x_p\,C_p = B$$

4.2 Structure des ensembles de solutions

Définition 27 : On appelle *rang d'un système linéaire*, le rang de sa matrice associée (ou de son application linéaire associée).

Propriété 46 : Soit un système linéaire (L) de rang r.

1. $S(H)$ est un $I\!K$-e.v de dimension finie $p-r$ (donc $S(H) \neq \emptyset$).

2. a) $S(L) \neq \emptyset \iff b \in \mathrm{Im} f$.

b) Supposons $S(L) \neq \emptyset$. Soit $X_0 = (x_1^0, x_2^0, \cdots, x_p^0)$ une solution particulière.

Alors $S(L) = \{X_0 + X / X \in S(H)\}$: on dit que $S(H)$ est un sous espace affinie de $I\!K^p$ de direction $S(H)$.

4.3 Système de Cramer

Attention : Pour parler de système de Cramer, il faut $n = p$.

Définition 30 : On dit que (L) est *un système de Cramer* lorsque l'une des conditions équivalentes suivantes :

1) $n = p = rg(L)$

2) A est inversible.

3) f est un automorphisme de $I\!K^n$.

Propriété 47 : Si (L) est un système de Cramer, alors (L) admet une unique solution et $S(H) = \{0_{I\!K^n}\}$.

Méthodes pratiques pour résoudre un système de Cramer :

1) On utilise les opérations élémentaires sur les lignes de la matrice (donc les équations du système) afin d'arriver à un système équivalent triangulaire se résolvant en commençant par la dernière équation.

Remarque : Cette méthode s'applique aussi pour un système qui n'est pas de Cramer : On arrive soit à une incompatibilité dans des équations ce qui signifie que le système n'a pas de solution, soit à une infinité de solutions où certaines inconnues s'expriment à l'aide d'autres qui deviennent des paramètres.

2) On utilise les déterminants (cf cours de PSI à ce sujet)