

Programme de colle : semaine 30 du 14/06 au 18/06.
Thèmes : Fonctions de deux variables. Produits scalaires.

1 Fonctions de deux variables réelles

1.1 Généralités :

1. Représentation graphique tridimensionnelle d'une fonction $(x, y) \rightarrow f(x, y)$.
2. Etude d'un domaine de définition. Ensembles ouverts du plan (définition).
3. Limite dans le plan. Continuité d'une fonction $(x, y) \rightarrow f(x, y)$.

1.2 Calcul différentiel :

1. Définition d'une dérivée directionnelle; **dérivées partielles** $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.
2. Fonctions de classe \mathcal{C}^1 (les dérivées partielles sont continues). **Théorème fondamental** : si f est \mathcal{C}^1 sur U alors pour tout $a \in U$ et tout $\vec{h} = (h_1, h_2)$:

$$f(a + \vec{h}) - f(a) = h_1 \frac{\partial f}{\partial x} + h_2 \frac{\partial f}{\partial y} + o(\|\vec{h}\|).$$

Interprétation physique du $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$.

3. Définition du vecteur gradient.
4. Généralisation pour les fonctions de $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ou \mathbb{R}^3 .

1.3 Utilisations :

1. **Points critiques (le gradient s'annule) et extrema locaux.**
2. Calcul des dérivées (partielles) pour une composée dans les cas suivants :
 - (a) $f \circ \varphi$ avec $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.
 - (b) $f \circ \varphi$ avec $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. **Exemple du changement en coordonnées polaires.**
3. Exemples simples d'E.D.P.

1.4 Intégrale double :

1. Intégrale double sur un rectangle $R = [a, b] \times [c, d]$ d'une fonction continue $f : R \rightarrow \mathbb{R}$. **Théorème de Fubini** :

$$\iint_R f = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx$$

2. Propriétés : linéarité, ordre, additivité par rapport au domaine de définition.

3. Intégration sur un domaine D plus complexe.

- (a) Fubini si $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, a \leq x \leq b, \phi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$ où ϕ et ψ sont deux fonctions continues sur $[a, b]$.
- (b) **Passage en coordonnées polaires.**

1.5 Champs de vecteurs

Un champ de vecteurs est une application \mathcal{C}^1 définie sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$:

$$\vec{F} : (x, y) \mapsto F(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)) \in \mathbb{R}^2$$

1. Représentation d'un champ de vecteurs.
2. Champ dérivant d'un potentiel scalaire (i.e il existe $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\vec{F} = \vec{\text{grad}}f$).
3. Si \vec{F} dérive d'un potentiel scalaire alors les dérivées croisées $\frac{\partial P}{\partial y}$ et $\frac{\partial Q}{\partial x}$ sont égales ; réciproque lorsque U est étoilé (théorème de Poincaré).
4. Intégrale curviligne :
 - (a) Définition ; soit γ un arc \mathcal{C}^1 :

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{M} = \int_{\gamma} P dx + Q dy = \int_a^b (P(\gamma(t))x'(t) + Q(\gamma(t))y'(t)) dt.$$

- (b) Calcul lorsque \vec{F} dérive d'un potentiel scalaire.
- (c) Formule de Green-Riemann.

2 Espace vectoriel euclidien

2.1 Produit scalaire

1. **Définition d'un produit scalaire.** Exemples usuels (sur \mathbb{R}^n et un espace de fonctions continues sur un segment).
2. Norme issue d'un produit scalaire.
 - (a) **L'inégalité de Cauchy-Schwarz et son cas d'égalité : à savoir démontrer !**
 - (b) Propriétés de la norme : $\|u\| = 0$ ssi $u = 0_E$; $\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|$; inégalité triangulaire.
 - (c) Quelques identités sur les normes et les produits scalaires :

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2(u|v), \text{ identité du parallélogramme.}$$

3. Relation d'orthogonalité.