

## Etude métrique des courbes planes

Nous étudions les propriétés métriques des courbes paramétrées du plan euclidien. Ces notes de cours récapitulent les définitions et formules importantes associées à cette étude.

Le plan euclidien est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . On rappelle qu'un arc (ou courbe) paramétré(e)  $(I, f)$  est la donnée d'un intervalle  $I \subset \mathbb{R}^2$  et d'une fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Cette fonction sera supposée au moins de classe  $\mathcal{C}^1$ . On pose  $f(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$ .

## 1 La question de la paramétrisation

### 1.1 Généralités

**Définition 1.** Soit  $(I, f)$  un arc paramétré de classe  $\mathcal{C}^1$ .

On dit  $\varphi$  est un paramétrage admissible pour l'arc  $(I, f)$  si  $\varphi$  est une bijection de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $J$  vers  $I$  telle que  $\varphi'$  ne s'annule pas.

Les arcs  $(I, f)$  et  $(J, f \circ \varphi)$  ont donc le même support ; c'est la manière de parcourir ce support qui change.

On dit qu'un arc  $(I, f)$  a un **paramétrage normal** lorsque pour tout  $t \in I$ , on a  $\|f'(t)\| = 1$ . Autrement dit l'arc est parcouru à vitesse constante égale à 1.

### 1.2 Abscisse curviligne

Tout arc paramétré admet un paramétrage normal. On considère pour cela l'**abscisse curviligne**. On suppose maintenant que tous les arcs considérés sont réguliers (i.e. sans point singulier).

**Définition 2.** Une abscisse curviligne est une application  $s$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$  telle que

$$\forall t \in I, s'(t) = \|f'(t)\|$$

Choisissons un point  $M_0 = f(t_0)$  du support. La position d'un point mobile  $M = f(t)$  sur la courbe est repéré par son abscisse curviligne  $s$  qui mesure la longueur algébrique de l'arc  $\widehat{M_0M}$ . Cette abscisse est donnée par la formule :

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|f'(u)\| du.$$

Il est souvent pratique de reparamétriser un arc à l'aide d'une abscisse curviligne. Dans la suite la fonction  $s$  sera vu comme une nouvelle variable.

**Propriété 1.1.** Soit  $(I, f)$  un arc paramétré de classe  $\mathcal{C}^1$ . L'abscisse curviligne est un paramétrage admissible pour l'arc  $(I, f)$ .

Soit  $g : J \rightarrow \mathbb{R}^2$  telle que pour tout  $t \in J$  on a  $g(s) = f(t)$ . Alors  $g$  a un paramétrage normal.

## 2 Repère mobile de Frenet

### 2.1 Généralités

Soit  $(I, f)$  un arc régulier. Notons  $M(t) = O + x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$  un point mobile de l'arc. On utilise souvent comme base de projection pour les vecteurs vitesse et accélération une base attachée au point  $M$  appelée **base de**

**Frenet.**

**Définition 3.** Soit  $(I, f)$  un arc régulier et  $M(t)$  un point mobile du support de l'arc. On appelle repère de Frenet le repère  $(M(t), \vec{T}(t), \vec{N}(t))$  avec

- $\vec{T}(t) = \frac{f'(t)}{\|f'(t)\|}$  le vecteur unitaire tangent en  $M$  (dirigé dans le sens du mouvement).
- $\vec{N}(t)$  le vecteur unitaire directement normal à  $\vec{T}(t)$ .

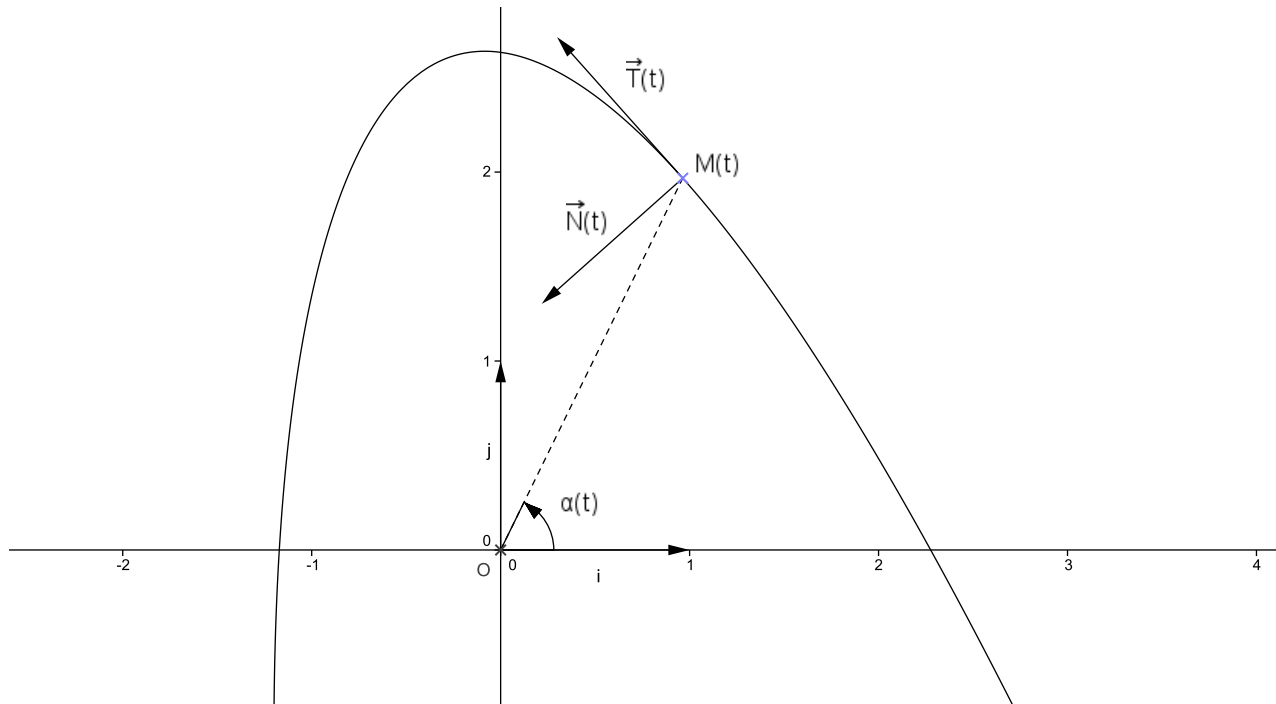


FIGURE 2.1 – Le repère de Frenet

Exprimons le vecteur vitesse dans la **base de Frenet**. Notons  $s$  une abscisse curviligne pour de  $f$  ; soit la quantité  $v = \frac{ds}{dt} = \|f'(t)\|$  : c'est la norme de la vitesse instantanée du point  $M$ .

$$\boxed{\frac{df}{dt} = v \vec{T}}$$

En particulier nous avons la relation  $\frac{df}{ds} = \vec{T}$ .

**2.2 Paramètre angulaire**

Nous admettons le résultat suivant (voir figure précédente) :

**Théorème 2.1.** *Supposons que l'arc  $(I, f)$  est de classe  $C^2$ . Alors il existe une fonction de classe  $C^1$   $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$  telle que*

$$\vec{T}(t) = \cos(\alpha(t))\vec{i} + \sin(\alpha(t))\vec{j}.$$

### 3 Courbure d'un arc

Dans ce paragraphe, on considère un arc régulier de classe  $\mathcal{C}^2$  et admettant un paramétrage normal. On note  $\alpha$  le paramètre angulaire défini dans le paragraphe précédent :

$$\vec{T}(s) = \cos(\alpha(s))\vec{i} + \sin(\alpha(s))\vec{j}.$$

**Définition 4.** On appelle **courbure** au point  $M(s)$  le réel  $\gamma(s) = \alpha'(s)$ .

Un point  $M$  est dit **bi-régulier** si sa courbure n'est pas nulle.

On appelle **rayon de courbure** en un point  $M(s)$  bi-régulier le réel  $R(s) = \frac{1}{\gamma(s)}$ . Le centre de courbure au point  $M$  est le point  $C$  tel que  $\overrightarrow{MC} = R\vec{N}$ .

**Proposition 3.1.** Nous avons les **formules de Frenet** :

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \gamma\vec{N} \text{ et } \frac{d\vec{N}}{ds} = -\gamma\vec{T}$$

Exprimons le vecteur accélération dans la **base de Frenet**. On note toujours  $v = \frac{ds}{dt}$  la norme de la vitesse.

$$\frac{d^2f}{dt^2} = \frac{dv}{dt}\vec{T} + \frac{v^2}{R}\vec{N}$$

Le calcul du rayon de courbure peut se faire en coordonnées cartésiennes sans trop de difficultés (calculer le déterminant des vecteurs vitesse et accélération dans les bases orthonormées directes  $(\vec{i}, \vec{j})$  et  $(\vec{T}, \vec{N})$ ). Il vient la formule :

$$R = \frac{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{x'y'' - x''y'}$$

Dans la figure ci-dessous l'arc paramétré est donné par  $\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 1 - t^2 \end{cases}$

On a représenté le cercle de centre  $C$  et de rayon  $R$  (rayon de courbure) au point  $M$  à l'instant  $t = \frac{1}{2}$ .

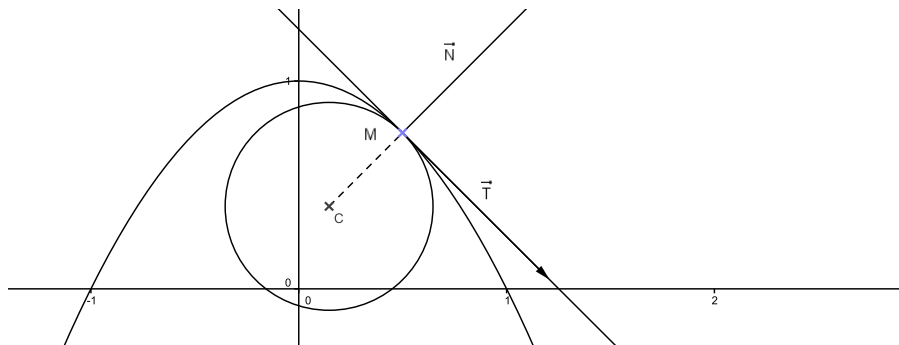


FIGURE 3.1 – Cercle osculateur