

# Notions sur les applications.

Il est souvent intéressant de savoir qu'une application établit une correspondance *biunivoque* entre son ensemble de départ et son ensemble d'arrivée (pour résoudre une équation, déterminer une structure...); on dit que cette application est *bijection*. Cette notion se décompose en deux notions complémentaires : l'injectivité et la surjectivité.

## 1 Injection et surjection

Soit  $E$  et  $F$  des ensembles et  $f : E \rightarrow F$  une application.

### 1.1 Injectivité

<p><u><math>f</math> est injective</u></p> <p><math>\Leftrightarrow</math> Tout élément de <math>F</math> a <b>au plus</b> un antécédent.</p> <p><math>\Leftrightarrow \forall (x_1, x_2) \in E^2, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.</math></p> <p><math>\Leftrightarrow \forall y \in F</math>, l'équation <math>y = f(x)</math> a <b>au plus</b> une solution <math>x \in E</math>.</p>	<p><u>Exemple</u></p>
--	-----------------------

### 1.2 Surjectivité

<p><u><math>f</math> est surjective</u></p> <p><math>\Leftrightarrow</math> Tout élément de <math>F</math> a <b>au moins</b> un antécédent.</p> <p><math>\Leftrightarrow \forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x).</math></p> <p><math>\Leftrightarrow \forall y \in F</math>, l'équation <math>y = f(x)</math> a <b>au moins</b> une solution <math>x \in E</math>.</p>	<p><u>Exemple</u></p>
--	-----------------------

## 2 Bijection

### 2.1 Définitions

On donne ci-dessous la définition de la notion de *bijection* d'une application  $f : E \rightarrow F$ .

<p><u><math>f</math> est bijective</u></p> <p><math>\Leftrightarrow f</math> est injective <b>et</b> surjective.</p> <p><math>\Leftrightarrow</math> Tout élément de <math>F</math> a <b>exactement</b> un antécédent.</p> <p><math>\Leftrightarrow \forall y \in F, \exists! x \in E, y = f(x).</math></p> <p><math>\Leftrightarrow \forall y \in F</math>, l'équation <math>y = f(x)</math> a <b>exactement</b> une solution.</p>	<p><u>Exemple</u></p>
---	-----------------------

On dit que deux ensembles sont **en bijection** lorsqu'il existe une application bijective entre ces deux ensembles.

**Exemples.**

– L'application ci-dessous est une bijection :

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x + 1 \end{aligned}$$

– Deux intervalles de  $\mathbb{R}$ ,  $[a, b]$  et  $[c, d]$  (avec  $a < b$  et  $c < d$ ) sont en bijection. (*Pourquoi ?*).

## 2.2 Propriétés

Le théorème fondamental suivant établit une équivalence entre la notion de *bijektivité* et la notion d'*application réciproque* :

**Théorème 2.1.** *Soit  $f$  une application de  $E$  vers  $F$ .*

*L'application  $f$  est bijective si et seulement si  $f$  admet une application réciproque  $f^{-1} : F \rightarrow E$ .*

**Exemple :** L'application  $\exp$  établit une bijection de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}_+^*$ . Sa réciproque  $\exp^{-1}$  est l'application :

$$\ln : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}.$$

La proposition suivante concerne la composition des applications.

**Proposition 2.2.**

- *La composée de deux injections est une injection.*
- *La composée de deux surjections est une surjection.*

On en déduit :

**Corollaire 2.3.** *La composée de deux bijections est une bijection. En particulier, si  $f$  est bijective alors :*

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

## 3 Image directe, image réciproque

Soit  $E$  et  $F$  des ensembles et  $f : E \rightarrow F$  une application.

- Pour toute partie  $A \subset E$ , on définit l'**image directe** de  $A$  par  $f$  :

$$f(A) = \{y \in F, \exists x \in E, y = f(x)\}.$$

- Pour toute partie  $B \subset F$ , on définit l'**image réciproque** de  $B$  par  $f$  :

$$f^{-1}(B) = \{x \in E, \exists x \in E, f(x) \in B\}.$$

**Exemples :**