Résolution des équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants.

PCSI A 2009. Lycée Brizeux

23 octobre 2009

Position du problème

On cherche à déterminer l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants :

$$ay'' + by' + cy = f(t), \text{ avec } (a, b, c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2,$$

et f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ d'un type particulier.

Plan

1. Equation homogène.
2. Détermination d'une solution particulière.
3. Plan de résolution

Position du problème

On cherche l'ensemble S_0 des solutions de :

$$(E_0) \;\; ay'' + by' + cy = 0, \text{ avec } (a, b, c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2$$

Position du problème

On cherche l'ensemble S_0 des solutions de :

$$(E_0)\ \ ay'' + by' + cy = 0,\ \text{avec}\ (a, b, c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2$$

- $P(X) = aX^2 + bX + c$.
- $\Delta = b^2 - 4ac$.
- $P(X) = 0$ l'équation caractéristique de (E).

$(E_0)\ \ ay'' + by' + cy = 0$ et $P(X) = aX^2 + bX + c$.

Détermination de S_0

- P a deux racines simples r_1 et r_2 ($\Delta \neq 0$) :

$$S_0 = \{t \mapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\}.$$

$(E_0)\;\; ay'' + by' + cy = 0$ et $P(X) = aX^2 + bX + c$.

Détermination de S_0

- P a deux racines simples r_1 et r_2 ($\Delta \neq 0$) :

$$S_0 = \{t \mapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t},\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2\}.$$

- P a une racine double r_0 ($\Delta = 0$) :

$$S_0 = \{t \mapsto (\lambda t + \mu) e^{r_0 t},\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2\}.$$

Cas réel

$$(E_0) \ \ ay'' + by' + cy = 0 \text{ avec } (a,b,c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2 \text{ et } P(X) = aX^2 + bX + c.$$

Détermination de S_0

- P a deux racines réels simples r_1 et r_2 ($\Delta \neq 0$) :

$$S_0 = \{t \mapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}, \ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Cas réel

$(E_0)\;\; ay'' + by' + cy = 0$ avec $(a,b,c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2$ et $P(X) = aX^2 + bX + c$.

Détermination de S_0

- P a deux racines réels simples r_1 et r_2 ($\Delta \neq 0$) :

$$S_0 = \{t \mapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t},\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\}.$$

- P a une racine double r_0 ($\Delta = 0$) :

$$S_0 = \{t \mapsto (\lambda t + \mu) e^{r_0 t},\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Cas réel

$(E_0)\ \ ay'' + by' + cy = 0$ avec $(a,b,c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2$ et $P(X) = aX^2 + bX + c$.

Détermination de S_0

- P a deux racines réels simples r_1 et r_2 $(\Delta \neq 0)$:

$$S_0 = \{t \mapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t},\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\}.$$

- P a une racine double r_0 $(\Delta = 0)$:

$$S_0 = \{t \mapsto (\lambda t + \mu)e^{r_0 t},\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\}.$$

- P a deux racines complexes conjuguées $r = u + iv$ et $\bar{r}$ $(\Delta < 0)$:

$$S_0 = \{t \mapsto e^{ut}(\lambda \cos(vt) + \mu \sin(vt)),\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Plan

1. Equation homogène.
2. Détermination d'une solution particulière.
3. Plan de résolution

Position du problème

On cherche une solution particulière de l'équation :

$$ay'' + by' + cy = f(t), \text{ avec } (a, b, c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2,$$

lorsque $f(t) = P_n(t)e^{\alpha t}$.

Soit $(E)\ \ ay'' + by' + cy = P_n(t)e^{\alpha t}$, avec $\deg P_n = n$.
Posons $R(X) = aX^2 + bX + c$.

Soit $(E)\ \ ay'' + by' + cy = P_n(t)e^{\alpha t}$, avec $\deg P_n = n$.
Posons $R(X) = aX^2 + bX + c$.

Forme d'une solution particulière y

$y(t) = Q(t)e^{\alpha t}$ avec $Q \in \mathbb{C}[X]$.

Soit (E) $ay'' + by' + cy = P_n(t)e^{\alpha t}$, avec $\deg P_n = n$.
Posons $R(X) = aX^2 + bX + c$.

Forme d'une solution particulière y

$y(t) = Q(t)e^{\alpha t}$ avec $Q \in \mathbb{C}[X]$.

- α n'est pas racine de P, $deg(Q) = n$.

Soit $(E)\ \ ay'' + by' + cy = P_n(t)e^{\alpha t}$, avec $\deg P_n = n$.
Posons $R(X) = aX^2 + bX + c$.

Forme d'une solution particulière y

$y(t) = Q(t)e^{\alpha t}$ avec $Q \in \mathbb{C}[X]$.

- α n'est pas racine de P, $deg(Q) = n$.
- α est racine de P
  - α est racine simple, $deg(Q) = n+1$.
  - α est racine double, $deg(Q) = n+2$.

Plan

1. Equation homogène.
2. Détermination d'une solution particulière.
3. Plan de résolution

On cherche l'ensemble S des solutions de :

$$\boxed{(E)\ \ ay'' + by' + cy = P_n(t)e^{\alpha t}}$$

On cherche l'ensemble S des solutions de :

$$\boxed{(E)\ \ ay'' + by' + cy = P_n(t)e^{\alpha t}}$$

1. On détermine l'ensemble S_0 des solutions de (E_0)

On cherche l'ensemble S des solutions de :

$$\boxed{(E) \;\; ay'' + by' + cy = P_n(t)e^{\alpha t}}$$

1. On détermine l'ensemble S_0 des solutions de (E_0)
2. On détermine une solution particulière y_0 de (E).

On cherche l'ensemble S des solutions de :

$$\boxed{(E) \;\; ay'' + by' + cy = P_n(t)e^{\alpha t}}$$

1. On détermine l'ensemble S_0 des solutions de (E_0)
2. On détermine une solution particulière y_0 de (E).
3. $S = \{y_0 + h, \; h \in S_0\}$.

On cherche l'ensemble S des solutions de :

$$\boxed{(E)\ \ ay'' + by' + cy = P_n(t)e^{\alpha t}}$$

1. On détermine l'ensemble S_0 des solutions de (E_0)
2. On détermine une solution particulière y_0 de (E).
3. $S = \{y_0 + h,\ h \in S_0\}$.
4. + Conditions initiales initiales éventuelles pour déterminer une unique solution.