Les fonctions trigonométriques

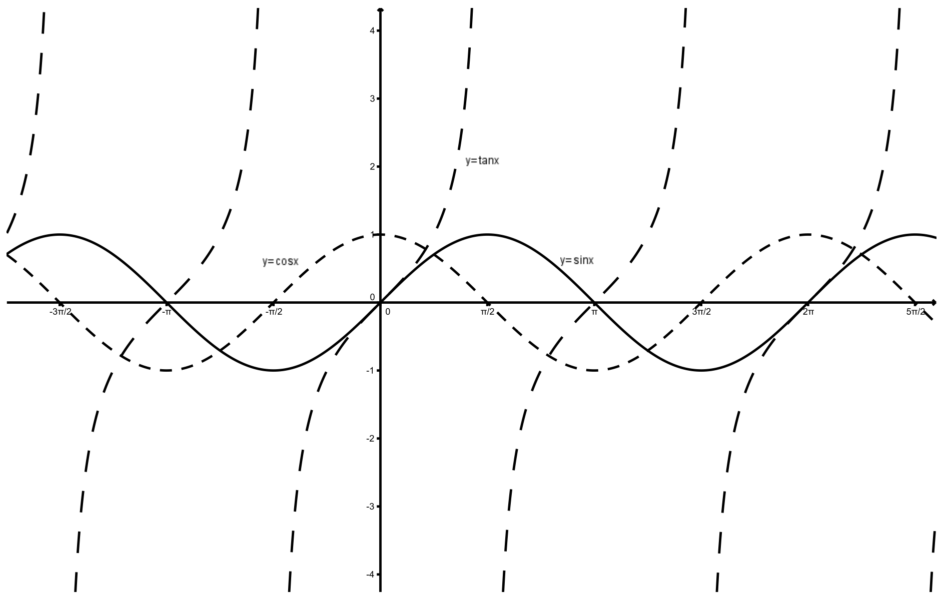

FIGURE 0.1 – Foncions trigonométriques

Formulaire de trigonométrie

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right), \quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin' x = \cos x \quad \text{et} \;\; \cos' x = -\sin x$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right), \quad \tan' x = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$$

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x \in \pi\mathbb{Z}$$

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad \sin(\frac{\pi}{2} + k\pi) = (-1)^k \quad \text{et} \;\; \cos(k\pi) = (-1)^k$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$$

<u>Formules d'addition</u> : $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$,

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$\forall (a,b) \in \left(\mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)\right)^2$:

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}, \quad \text{lorsque } a+b \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$$

$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}, \quad \text{lorsque } a-b \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$$

$\forall a \in \mathbb{R}$,

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$$

$$\tan 2a = \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}, \quad \text{lorsque ces éléments sont définis.}$$

Formules de linéarisation $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$,

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}\left(\cos(a-b) - \cos(a+b)\right)$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}\left(\sin(a+b) + \sin(a-b)\right)$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}\left(\cos(a-b) + \cos(a+b)\right)$$

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$$

$$\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$$

Formules de transformation de sommes en produits : $\forall (p,q) \in \mathbb{R}^2$,

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$$

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p-q}{2} \sin \frac{p+q}{2}$$

Parmétrage rationnel des fonctions trigonométriques :

pour $\forall \theta \notin \pi + 2\pi\mathbb{Z}$, en posant $t = \tan \frac{\theta}{2}$:

$$\sin \theta = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos \theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \tan \theta = \frac{2t}{1-t^2}$$