Dictionnaire : géométrie plane - nombres complexes.

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Objets du plan	**Complexes**
Points $A(x, y)$	Affixe $z_A = x + iy \in \mathbb{C}$
Vecteur $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$	Affixe $z_{\vec{u}} = x + iy \in \mathbb{C}$
$\overrightarrow{AB}$	$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$
Barycentre G de $(A_k, a_k)_{k=1..n}$	$z_G = \sum_{k=1}^{n} a_k z_{A_k}$
Norme $\|\|\vec{u}\|\|$	Module $\|z_{\vec{u}}\|$
Distance AB	$\|z_B - z_A\|$
Angle $\left(\vec{i}, \vec{u}\right)$	Argument $\arg(z_{\vec{u}})$
Angle $(\vec{u}, \vec{v})$	Argument $\arg\left(\frac{z_{\vec{v}}}{z_{\vec{u}}}\right)$
Angle $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$	$\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)$
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires	$\frac{z_{\vec{v}}}{z_{\vec{u}}} \in \mathbb{R}$
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux	$\frac{z_{\vec{v}}}{z_{\vec{u}}} \in i\mathbb{R}$
Produit scalaire $\vec{u}.\vec{v}$	$\mathrm{Re}(\overline{z_{\vec{u}}} z_{\vec{v}})$
Déterminant $\det(\vec{u}, \vec{v})$	$\mathrm{Im}(\overline{z_{\vec{u}}} z_{\vec{v}})$
Droite $ax + by + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$	$\alpha z + \bar{\alpha}\bar{z} + c = 0$, $\alpha \in \mathbb{C}$

Transformations du plan complexe.

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$. Tout point $M(x,y)$ (resp. vecteur $\vec{u}$(x,y)) est repéré par son affixe $u = x+iy$ (resp. $z_{\vec{u}} = x+iy$).

1 Rappels

L'écriture complexe d'une translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe u est donnée par :

$$z \longmapsto z+u.$$

L'écriture complexe d'une rotation d'angle θ et de centre $\omega \in \mathbb{C}$ est donnée par :

$$z \longmapsto \omega + e^{i\theta}(z-\omega).$$

L'écriture complexe d'une homothétie de rapport $k \in \mathbb{R}^*$ et de centre $\omega \in \mathbb{C}$ est donnée par :

$$z \longmapsto \omega + k(z-\omega).$$

L'écriture complexe de la symétrie d'axe $(O,\vec{i})$ est donnée par :

$$z \longmapsto \bar{z}.$$

2 Transformation $z \mapsto az+b$

Etant donné $(a,b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$, nous considérons dans cette partie les transformations de la forme :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & az+b \end{array}$$

On dit que f est une **similitude directe** du plan.
Les similitudes directes vérifient les points suivants :

1. La composée de deux similitudes directes $f_1(z) = a_1 z + b_1$ et $f_2(z) = a_2 z + b_2$ est une similitude directe :
$$f_2 \circ f_1(z) = a_2 a_1 z + (a_2 b_1 + b_2).$$
2. Toute similitude directe définit une bijection de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}$. Sa réciproque est aussi une similitude directe donnée par :
$$f^{-1}(z) = \frac{z-b}{a}.$$

*En d'autres termes, l'ensemble $\mathcal{S}$ des similitudes directes muni de la loi $\circ$ est un **groupe**. C'est précisément un **sous-groupe** des bijections de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.*

2.1 Cas $|a| = 1$

Proposition 2.1.

1. *Si* $a = 1$ *alors* f *est une translation de vecteur* $\vec{u}$ *d'affixe* b.
2. *Supposons que* $a \neq 1$. *Alors* f *est une rotation d'angle* $\arg(a)$ *et de centre* $\omega = \dfrac{b}{1-a}$.

Démonstration. Démontrons le point 2. On a $z = az + b$ si et seulement si $z = \dfrac{b}{1-a}$. C'est l'unique point fixe de la transformation f. La relation $f(z) = az + b$ s'écrit aussi :

$$f(z) = \frac{b}{1-a} + a\left(z - \frac{b}{1-a}\right).$$

$\square$

2.2 Cas général

Proposition 2.2. *Soit* $f : z \mapsto az + b$ *une similitude directe avec* $a \neq 1$. *Alors* f *peut s'écrire comme composée d'une rotation* r *d'angle* $\theta = \arg(a)$ *et d'une homothétie* h *de rapport* $k = |a|$ *toutes deux de même* ***centre*** $\dfrac{b}{1-a}$ *:*

$$f = r \circ h = h \circ r.$$

Démonstration. Tout comme dans la démonstration de la proposition précédente, on vérifie que $\omega = \dfrac{b}{1-a}$ est l'unique point fixe de f et que $f(z) = \omega + a(z - \omega)$.
Posons $k = |a|$ et $\theta = \arg(z)$ de sorte que $a = ke^{i\theta}$. Considérons l'homothétie h et la rotation r définies par :

$$h(z) = \omega + k(z - \omega) \quad \text{et} \quad r(z) = \omega + e^{i\theta}(z - \omega).$$

Nous avons alors $r(h(z)) = r(\omega + k(z - \omega)) = \omega + e^{i\theta}k(z - \omega) = f(z)$. On vérifie de même que $h(r(z)) = f(z)$. $\square$

Nous avons les propriétés suivantes :

Propriétés 2.3.

1. *Une similitude conserve le parallélisme, le barycentre et les angles.*
2. *Une similitude multiplie les longueurs par* k *et les aires par* k^2.
3. *Réciproquement, toute application du plan qui admet un point fixe* O *et qui à tout point* M *associe* M' *tel que :*

$$OM' = kOM \ \text{ et } \left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}\right) = \theta \ \text{ avec } k > 0 \text{ et } \theta \in \mathbb{R},$$

est une similitude directe.