

**Fonctions d'une variable réelle à valeurs complexes.**

## 1 Généralités

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $f$  une fonction de  $I$  vers  $\mathbb{R}$ . On note  $\operatorname{Re} f$  et  $\operatorname{Im} f$  les fonctions de  $I$  vers  $\mathbb{R}$  définies par :

$$\operatorname{Re} f : \begin{array}{l} I \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \operatorname{Re}(f(x)) \end{array} \quad \text{et} \quad \operatorname{Im} f : \begin{array}{l} I \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \operatorname{Im}(f(x)) \end{array}$$

Réciproquement, tout couple  $(u, v)$  de fonctions de  $I$  vers  $\mathbb{R}$  définit une fonction  $f(x)$  de  $I$  vers  $\mathbb{C}$ , par  $f(x) = u(x) + iv(x)$ .

Considérons deux fonctions  $f$  et  $g$  de  $I$  vers  $\mathbb{C}$  :

1.  $f$  et  $g$  sont égales si et seulement si  $\operatorname{Re} f = \operatorname{Re} g$  et  $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} g$ .
2. Les fonctions  $f + g$ ,  $af$  ( $a \in \mathbb{C}$ ) et  $fg$  se définissent naturellement à partir de l'addition et la multiplication des nombres complexes.
3. La fonction conjuguée  $\bar{f}$  de la fonction  $f$  est définie par  $\bar{f} = \operatorname{Re} f - i \operatorname{Im} f$ .
4. La fonction module  $|f|$  de la fonction  $f$  est définie par  $|f| = \sqrt{(\operatorname{Re} f)^2 + (\operatorname{Im} f)^2}$ , de sorte que la fonction inverse d'une fonction  $f$  qui ne s'annule pas sur  $I$  est :

$$\frac{1}{f} = \frac{\bar{f}}{|f|^2}.$$

## 2 Propriétés analytiques

### 2.1 Limite et continuité

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{C}$  et  $x_0 \in I$ . On dit que  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \in \mathbb{C}$  lorsque :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{Re} f(x) = \operatorname{Re}(a) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{Im} f(x) = \operatorname{Im}(a).$$

Les limites à droite et à gauche de  $x_0$  se définissent de la même manière.

Ainsi la fonction  $f$  est *continue* en  $x_0$  si et seulement si les fonctions  $\operatorname{Re} f$  et  $\operatorname{Im} f$  le sont.

**Exercice 1.** Montrer que  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$  si et seulement si  $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x) - a| = 0$ .

### 2.2 Dérivabilité

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{C}$  et  $x_0 \in I$ . On dit que  $f$  est dérivable en  $x_0$  lorsque  $\operatorname{Re} f$  et  $\operatorname{Im} f$  le sont. On définit alors  $f'(x_0) = \operatorname{Re}(f'(x_0)) + i \operatorname{Im}(f'(x_0))$ .

Si  $f$  est dérivable sur  $I$ , on a donc :

$$f' = (\operatorname{Re} f)' + i(\operatorname{Im} f)'$$

Les règles de calcul des dérivées sont les mêmes que pour les fonctions à valeurs réelles :

$$(f + g)' = f' + g' \quad ; \quad (af)' = a(f)', \quad a \in \mathbb{C}.$$

$$(fg)' = f'g + fg' \quad ; \quad \left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}.$$

Nous avons également les règles suivantes :

1. Si  $f$  est dérivable sur  $I$ , alors  $\bar{f}$  l'est aussi et  $(\bar{f})' = \overline{f'}$ .
2. Si  $f$  est dérivable sur  $I$  et ne s'annule pas sur  $I$ , alors  $|f|$  est aussi dérivable et

$$|f|' = \frac{\operatorname{Re} f' \operatorname{Re} f + \operatorname{Im} f' \operatorname{Im} f}{|f|}.$$

3. Soit  $J$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $\varphi : J \rightarrow I$  une fonction dérivable ; alors  $f \circ \varphi$  est dérivable et

$$(f \circ \varphi)' = \varphi'(f' \circ \phi).$$

### 2.3 Intégrales et primitives

Posons  $I = [a; b]$  et supposons  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  continue sur  $I$ . On définit l'intégrale sur  $I$  de  $f$  par :

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b \operatorname{Re} f(t)dt + i \int_a^b \operatorname{Im} f(t)dt.$$

Toutes les propriétés de linéarité de l'intégrale sont conservées et  $|\int_a^b f(t)dt| \leq \int_a^b |f(t)|dt$ .

Enfin la fonction  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$  est la *primitive* de  $f$  qui s'annule en  $a$ .

## 3 Exponentielle à valeurs complexes

Pour tout  $\alpha \in \mathbb{C}$ , on considère la fonction  $f$  définie par :

$$\begin{array}{lcl} f : \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & e^{\alpha t} \end{array}$$

**Propriété 3.1.** La fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $f'(t) = \alpha f(t)$ .

*Démonstration.* Posons  $\alpha = a + ib$ . Alors  $\operatorname{Re} f(t) = e^{at} \cos(bt)$  et  $\operatorname{Im} f(t) = e^{at} \sin(bt)$ . Les fonctions  $\operatorname{Re} f$  et  $\operatorname{Im} f$  sont dérivables sur  $\mathbb{R}$  donc  $f$  l'est aussi et  $f' = (\operatorname{Re} f)' + i(\operatorname{Im} f)'$ . Nous avons  $\operatorname{Re}(f)' = e^{at}(a \cos(bt) - b \sin(bt))$  et  $\operatorname{Im} f' = e^{at}(a \sin(bt) + b \cos(bt))$ , d'où :

$$f'(t) = (a + ib)e^{at}(\cos(bt) + i \sin(bt)) = \alpha f(t).$$

□

**Exercice 2.** Soit  $g : I \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction dérivable sur  $I$ . Montrer que la fonction  $t \mapsto e^{g(x)}$  est dérivable sur  $I$  et que sa dérivée est  $g'(x)e^{g(x)}$ .