

Présentation de la notion de groupe.

La notion de groupe apparaît essentiellement pour la première fois dans les travaux d'Evariste Galois (1811-1832) sur la résolution par radicaux de certaines équations algébriques. Cette notion connût alors un fort développement et apparraît désormais dans presque toutes les branches des mathématiques (notamment en géométrie), ainsi que dans de nombreuses branches de la physique.

1 Loi de composition interne.

Etant donné un ensemble non vide E , une *loi de composition interne* sur E est une application de E^2 vers E : à tout couple (x, y) d'éléments de E , on associe un troisième élément de E .

Exemples :

- Pour $E = \mathbb{N}$, l'application qui à (n, m) associe $n + m$ est une loi de composition interne.
- Soit E l'ensemble des applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . L'application qui à $(f, g) \in E^2$ associe $f \circ g$ est une loi de composition interne.

2 Structure de groupe.

Soit E un ensemble non vide muni d'une loi de composition interne. Désignons la loi par le symbole $*$ et notons $x * y$ l'élément associé par la loi au couple (x, y) . Nous avons donc une application :

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \longrightarrow & G \\ (x, y) & \longmapsto & x * y \end{array}$$

On dit que E est *un groupe* si la loi possède les propriétés suivantes :

- La loi est *associative* : $\forall (x, y, z) \in E^3, \quad x * (y * z) = (x * y) * z$.
- la loi possède un *élément neutre* e tel que : $\forall x \in E, \quad x * e = e * x = x$.
- Tout élément admet un *symétrique* pour la loi : pour tout $x \in E$, il existe $y \in E$ tel que $x * y = y * x = e$

Exemples de groupes :

- $E = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} est un groupe pour la loi qui à (x, y) associe $x + y$.
- $E = \mathbb{R}_+^*$ est un groupe pour la loi qui à (x, y) associe xy .
- $E = \mathbb{C}^*$ est un groupe pour la loi qui à (z, z') associe zz' .
- Soit A un ensemble et E l'ensemble des *bijections* de A dans A . Alors E est un groupe pour la loi qui à (f, g) associe $f \circ g$.
- P_n est un polygone régulier à n côtés du plan. L'ensemble des *isométries* du plan qui laisse stable P_n est un groupe pour la loi de composition des applications.

Exercice 1. Dans chacun des cas ci-dessus, déterminer l'élément neutre du groupe puis le symétrique d'un élément du groupe.

Exercice 2. Vérifier que les ensembles suivants ne sont pas des groupes pour la loi de composition interne donnée :

- $E = \mathbb{N}$ pour la loi $+$.
- $E = \mathbb{Q}$ pour la loi \times .
- $E = \mathbb{C}$ pour la loi $*$ définie par $z * z' = z + \bar{z}'$.

Exercice 3. On pose $A = \{a, b, c\}$. Donner tous les éléments du groupe des bijections de A vers A .

Exercice 4. Montrer que l'ensemble des translations du plan est un groupe pour la composition des applications.

3 Morphisme de groupes

Soit G_1 et G_2 des groupes dont les lois sont notées respectivement $*$ et \bullet . Un morphisme de G_1 vers G_2 est une application qui préserve les structures de groupes. Plus précisément, on dit qu'une application $f : G_1 \rightarrow G_2$ est un *morphisme* de groupe si :

$$\forall (x, y) \in G_1, \quad f(x * y) = f(x) \bullet f(y).$$

Exemples de morphismes de groupes :

- La fonction \ln est un morphisme de (\mathbb{R}_+^*, \times) vers $(\mathbb{R}, +)$.
- La fonction \exp est un morphisme de $(\mathbb{R}, +)$ vers (\mathbb{R}_+^*, \times) .
- L'application $n \mapsto 2n$ est un morphisme de $(\mathbb{Z}, +)$ vers $(\mathbb{Z}, +)$.