

Devoir Maison 1

Le devoir est à remettre le mardi 8 septembre 2009. Vous attacherez un soin particulier à la rédaction et à la clarté du raisonnement ainsi qu'à la présentation de la copie (les résultats devront être mis en évidence).

Problème (15 points).

Question préliminaire.

Montrer que pour tout nombre réel x ,

$$\sqrt{1+x^2} > |x|.$$

Partie I. Etude d'une fonction.

1. On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = x + \sqrt{1+x^2}.$$

- (a) Montrer que la fonction $\ln(f)$ est bien définie sur \mathbb{R} et qu'elle est impaire.
 - (b) Etudier la fonction f (limite aux bornes, sens de variation). On appelle \mathcal{C}_f la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .
 - (c) Déterminer l'équation de la tangente à \mathcal{C}_f au point d'abscisse 0.
 - (d) Montrer que la droite d'équation $y = 2x$ est une asymptote à \mathcal{C}_f en $+\infty$. Préciser leur position relative.
 - (e) Représenter \mathcal{C}_f sur une feuille de papier millimétré.
2. On considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{x^2 - 1}{2x}$$

Montrer que l'application g est la réciproque de l'application f . Tracer la courbe \mathcal{C}_g représentative de la fonction g sur la même feuille de papier millimétré.

Partie II. Une suite de fonctions polynomiales.

1. On considère la fonction h définie par :

$$h(u) = \frac{1}{2} \left(u + \frac{1}{u} \right)$$

Etudier la fonction h (ensemble de définition, limite aux bornes, tableau de variation).

2. Soit n un entier naturel non nul. On considère la fonction P_n définie sur \mathbb{R} par :

$$P_n(x) = \frac{1}{2} \left((x + \sqrt{1+x^2})^n + (x - \sqrt{1+x^2})^n \right)$$

- (a) Expliciter P_1 , P_2 et P_3 .
- (b) Montrer que P_n est une fonction polynomiale. Préciser son degré.
- (c) Etudier la parité de la fonction P_n .

(d) On note q_n la fonction polynomiale $x \rightarrow x^n$. Suivant la parité de n , montrer que :

$$P_n = h \circ q_n \circ f \text{ ou } P_n = g \circ q_n \circ f.$$

En déduire le tableau de variation de P_n .

Exercice (5 points). Soit E un ensemble et p une application de E vers lui-même telle que :

$$p \circ p = p.$$

1. Donner des exemples d'ensembles E et d'applications p satisfaisant une telle propriété.
2. Dans cette question, on suppose que $E =]0; +\infty[$. On suppose de plus que $p : E \rightarrow E$ est dérivable et surjective. Montrer que la dérivée p' est constante puis en déduire p .
3. On revient au cas général. Montrer que les trois assertions ci-dessous sont équivalentes :
 - (i) p est surjective.
 - (ii) p est injective.
 - (iii) p est l'identité.