Devoir Maison 15

Le devoir est à remettre le jeudi 17 juin. Vous attacherez un soin particulier à la rédaction et à la clarté du raisonnement ainsi qu'à la présentation de la copie.

Exercice 1. Etude d'un champ de vecteurs.

Soit F le champ de vecteurs défini sur $\mathbb{R}^2$ par $F(x, y) = (-y, x)$.

1. Représenter F.
2. Le champ F dérive-t-il d'un potentiel scalaire ?
3. Soit un réel $R > 0$ et $\mathcal{C}_R^+$ le cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon R vu comme arc paramétré de classe $\mathcal{C}^1$ et parcouru dans le sens positif.
   (a) Donner un paramétrage pour $\mathcal{C}_R^+$.
   (b) A l'aide de la formule de Green-Riemann déterminer l'intégrale curviligne $\int_{\mathcal{C}_R^+} F$.

Exercice 2. Une géométrie un peu différente.

Soit $E = \mathbb{R}^2$ et l'application φ définie de $E \times E$ vers $\mathbb{R}$ pour tout $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $v = (x', y') \in \mathbb{R}^2$ par :

$$\varphi(u, v) = xx' + 2yy'.$$

1. Démontrer que φ définit un produit scalaire sur E.
2. Déterminer et tracer les ensembles suivants :
   (a) $F^{\perp}$ où F est la droite engendrée par le vecteur $(1, 1)$.
   (b) L'ensemble des vecteurs $(x, y) \in E$ de norme 1.
3. Notons $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$ les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^2$. La base (e_1, e_2) est-elle orthonormale ? Que donne le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt appliqué à (e_1, e_2) ?
4. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal de $u = (x, y)$ sur la droite engendrée par e_2.