Devoir Maison 5

Le devoir est à remettre le 30 Novembre 2009. Vous attacherez un soin particulier à la rédaction et à la clarté du raisonnement ainsi qu'à la présentation de la copie : pensez aux marges !
Les résultats devront être mis en évidence (soulignez ou encadrez !).

Problème 1. Quelques relations dans le triangle.

Partie 1 : segment vu sous un angle constant.

Soit A et B deux points du plan et $\alpha \in [0, \pi[$. On se propose de déterminer l'ensemble S_α des points M (distincts de A et B) du plan tels que :

$$\left(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}\right) \equiv \alpha \mod \pi.$$

1. Déterminer S_0 et $S_{\frac{\pi}{2}}$.
   On suppose désormais que $\alpha \neq 0$. On considère le repère orthonormé direct $\mathcal{R}(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ d'origine O le milieu de $[AB]$ et tel que $\overrightarrow{e_1} = \frac{1}{||\overrightarrow{OB}||}\overrightarrow{OB}$. La donnée de $\mathcal{R}$ nous permet d'identifier les points du plan et l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$.
2. On note l l'affixe de B. Exprimer l'affixe de A en fonction de l.
3. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur le nombre complexe $Z = \left(\dfrac{z-l}{z+l}e^{-i\alpha}\right)$ pour que le point M d'affixe z appartienne à S_α.
4. En déduire que M d'affixe z appartient à S_α si et seulement si :
$$\operatorname{Im}\left((z-l)(\bar{z}+l)e^{-i\alpha}\right) = 0.$$
5. Montrer que S_α est le cercle (privé de A et B) de centre $(0, l\cotan(\alpha))$ et de rayon $\dfrac{AB}{2\sin(\alpha)}$.

Partie 2 : relation des sinus.

Soit ABC un triangle direct du plan. Notons α, β et γ les mesures respectives des angles des sommets A, B et C du triangle ABC. Posons $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$ et S l'aire du triangle ABC.

1. En exprimant de trois manières différentes la quantité S à l'aide du déterminant, montrer que :
$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} = \frac{abc}{2S}.$$
2. En déduire, à l'aide de la partie 1, que dans un triangle le rayon R du cercle circonscrit au triangle est donné par :
$$R = \frac{abc}{4S}.$$

Exercice 1. Division vectorielle.
Faire l'exercice 7 de la feuille de TD 7 (géométrie élémentaire de l'espace).

Exercice 2. Une famille de plan.
L'espace E est muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.

Soient $\mathcal{P}_1$ le plan d'équation cartésienne $x + 2\,y - z + 1 = 0$ et $\mathcal{P}_2$ celui d'équation cartésienne $x - y + 2\,z - 2 = 0$.

1. Montrer que $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ est une droite $\mathcal{D}$ dont on précisera une représentation paramétrique.

   Pour tout réel m, on note H_m l'ensemble des points de l'espace dont les coordonnées (x, y, z) vérifient :
   $$x + 2\,y - z + 1 + m\,(x - y + 2\,z - 2) = 0.$$
2. Justifier que pour tout $m \in \mathbb{R}$, H_m est un plan ; on en donnera un vecteur normal.
3. Que dire de la droite $\mathcal{D}$ vis-à-vis du plan H_m ? Justifier très soigneusement la réponse.
4. Parmi les plans H_m en existe-t-il un perpendiculaire à $\mathcal{P}_1$? Si oui, lequel ?

   Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des points de l'espace dont les coordonnées (x, y, z) vérifient
   $$x^2 + y^2 + z^2 + 2\,x - 4\,y + 1 = 0.$$
5. Montrer que $\mathcal{S}$ est une sphère dont on précisera les coordonnées du centre Ω et le rayon R.
6. Pour tout réel m, calculer la distance d_m du point Ω au plan H_m.
7. Existe-t-il des plans P_m qui soient tangents à la sphère $\mathcal{S}$? Si oui, combien ? Lesquels ?
8. Déterminer la distance de Ω à $\mathcal{D}$.
9. Établir que $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{S}$ est un cercle dont on précisera les coordonnées du centre ω et le rayon r.