

CORRIGÉ DU NEUVIÈME DEVOIR SURVEILLÉ.

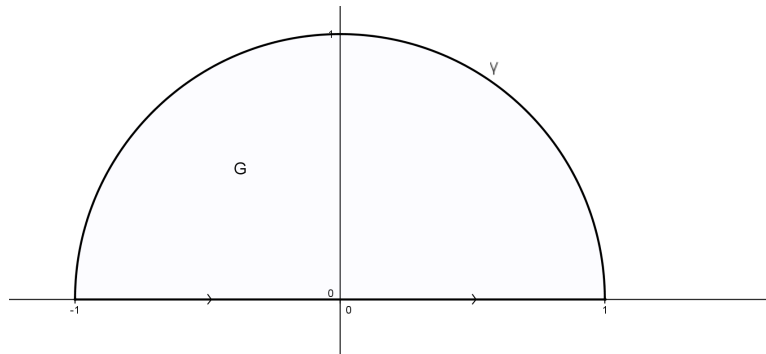
Fonctions de deux variables. Algèbre bilinéaire

EXERCICE DE CIRCULATION

1. Question de cours.

cf cours.

2. (a) Représentons $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y \geq 0 \text{ et } x^2 + y^2 \leq 1\}$ et γ l'arc frontière délimitant ce domaine, parcouru dans le sens trigonométrique.

FIG. 1 – Le domaine G

- (b) Une paramétrisation de l'arc γ peut se faire en décomposant γ en deux arcs γ_1 et γ_2 :

$$\gamma_1 \begin{cases} x(t) = \cos(t) \\ y(t) = \sin(t) \end{cases} \text{ avec } t \in [0, \pi] \text{ puis } \gamma_2 \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 0 \end{cases} \text{ avec } t \in [-1, 1].$$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} -y dx + x dy &= \int_{\gamma_1} -y dx + x dy + \int_{\gamma_2} -y dx + x dy \\ &= \int_0^{\pi} (\sin(t)^2 + \cos(t)) dt + \int_{-1}^1 0 dt \\ &= \pi \end{aligned}$$

- (c) Nous sommes bien dans les conditions d'utilisation de la formule rappelées dans l'énoncé. L'aire du domaine G_1 est $\frac{\pi}{2}$. Nous avons donc :

$$\int_{\gamma} -y dx + x dy = 2 \iint_G dx dy = \pi$$

On retrouve ainsi le résultat de la question précédente.

3. On suppose que les deux fonctions P et Q vérifient la propriété :

$$(\star) \text{ pour tout } (x, y) \in U, \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial P}{\partial y}(x, y)$$

- (a) La formule de Green-Riemann nous donne $\int_{\gamma} F = 0$.

(b) Le champ $F(x, y) = (y, x)$ défini sur \mathbb{R}^2 vérifie la propriété (\star) .

- (c) $(\star\star)$ le champ F dérive d'un potentiel scalaire. lorsqu'il existe une fonction $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $F = \text{grad } f$, i.e. :

$$P(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \text{ et } Q(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y).$$

Le champ F de la question précédente dérive sur \mathbb{R}^2 du potentiel scalaire $f(x, y) \rightarrow xy$ et vérifie donc la propriété $(\star\star)$.

- (d) Nous savons que $(\star\star) \Rightarrow (\star)$ et $(\star) \Rightarrow (\star\star)$ lorsque U est un ouvert étoilé.

PROBLÈME 1. UN PRODUIT SCALAIRE SUR DES ESPACES DE FONCTIONS.

Question préliminaire

1. Démontrons que φ définit un produit scalaire sur E .

- $\varphi(g, f) = \iint_R g(x, y)f(x, y) dx dy = \iint_R f(x, y)g(x, y) dx dy = \varphi(f, g)$ donc φ est symétrique.
- Soit f_1, f_2, g trois fonctions de E et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda f_1 + \mu f_2, g) &= \iint_R (\lambda f_1 + \mu f_2)(x, y)g(x, y) dx dy \\ &= \lambda \iint_R f_1(x, y)g(x, y) dx dy + \mu \iint_R f_2(x, y)g(x, y) dx dy \\ &= \lambda \varphi(f_1, g) + \mu \varphi(f_2, g) \end{aligned}$$

Donc φ est linéaire par rapport à la première variable. Par symétrie elle est donc bilinéaire.

- $\varphi(f, f) = \iint_R f(x, y)^2 dx dy \geq 0$.

Supposons que $\varphi(f, f) = 0$; la fonction f^2 est continue, positive et d'intégrale nulle sur R donc f^2 , et par conséquent f , est identiquement nulle sur R .

Partie I

2. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $af_0 + bf_1 + cf_2 = 0$. Nous avons donc :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, a + bx + cy = 0.$$

Pour $x = y = 0$ il vient $a = 0$; puis pour $x = 1$ et $y = 0$ il vient $b = 0$; et enfin pour $y = 1$ il vient $c = 0$. Ainsi (f_0, f_1, f_2) est une famille libre et $\dim F = 3$.

- 3. $\|f_0\| = 1, \|f_1\| = \|f_2\| = \frac{1}{\sqrt{3}}$ donc seul f_0 est unitaire.
- 4. $(f_0|f_1) = \frac{1}{2}, (f_0|f_2) = \frac{1}{2}$ et $(f_1|f_2) = \frac{1}{4}$. La famille (f_0, f_1, f_2) n'est donc pas orthogonale.
- 5. Le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt appliqué à (f_0, f_1, f_2) nous donne la base orthonormée de F :

$$\varepsilon_1 = 1, \quad \varepsilon_2 = 2\sqrt{3} \left(x - \frac{1}{2} \right), \quad \varepsilon_3 = 2\sqrt{3} \left(y - \frac{1}{2} \right)$$

Partie II

6. Soit $(k_1, k_2) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$. Nous avons l'égalité :

$$\cos(k_1 x) \cos(k_2 x) = \frac{\cos((k_1 + k_2)x) + \cos((k_1 - k_2)x)}{2}.$$

Il vient donc :

$$\int_0^{2\pi} \cos(k_1 x) \cos(k_2 x) dx = \begin{cases} \pi & \text{si } k_1 = k_2 ; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

7. Pour tout $(k_1, l_1) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ et tout $(k_2, l_2) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ nous avons

$$\begin{aligned} (e_{k_1, l_1} | e_{k_2, l_2}) &= \frac{1}{\pi^2} \iint_R \cos(k_1 x) \cos(l_1 y) \cos(k_2 x) \cos(l_2 y) dx dy \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \cos(k_1 x) \cos(k_2 x) dx \int_0^{2\pi} \cos(l_1 y) \cos(l_2 y) dy \end{aligned}$$

D'après la question précédente nous avons donc :

$$(e_{k_1, l_1} | e_{k_2, l_2}) = \begin{cases} 1 & \text{si } k_1 = k_2 \text{ et } l_1 = l_2 ; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Autrement dit la famille $\mathcal{E}_n = (e_{k,l})_{(k,l) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$ est une famille orthonormale.

8. On note $E = \text{Vect}(\mathcal{E}_n)$. La famille \mathcal{E}_n est orthonormale donc c'est une famille libre. Ainsi \mathcal{E}_n est une base de E et $\dim E = n^2$.

9. Soit l'application Δ définie pour toute fonction f de classe C^2 sur \mathbb{R}^2 par

$$\Delta f : (x, y) \mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)$$

- (a) On vérifie sans difficulté que Δ est linéaire. Ensuite $\Delta(e_{k,l}) = -(k^2 + l^2)e_{k,l}$ donc $\Delta(E) \subset E$. Ainsi Δ induit un endomorphisme sur E .
- (b) Ordonnons les éléments de \mathcal{E}_n de la manière suivante :

$$(e_{1,1}, \dots, e_{1,n}, \dots, e_{i,1}, \dots, e_{i,n}, \dots, e_{n,1}, \dots, e_{n,n})$$

La matrice de Δ dans la base \mathcal{E}_n s'écrit :

$$\begin{pmatrix} M_1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & \ddots & & & \\ \vdots & & M_i & & \vdots \\ & & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & & M_n \end{pmatrix}$$

où M_i est la matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont les $-(i^2 + j^2)$ pour $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

- (c) La matrice de Δ dans la base \mathcal{E}_n est diagonale et tous ses coefficients diagonaux sont non nuls. Donc Δ est de rang maximal : $\text{rang } \Delta = n^2$. La formule du rang $\dim \ker \Delta + \text{rang } \Delta = \dim E$ donc

$$\ker \Delta = \{0_E\}.$$

L'équation $\Delta f = 0$ admet donc pour unique solution dans E la fonction identiquement nulle.

PROBLÈME 2. RÉOLUTION INTÉGRALE D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE

Partie 1. Continuité et dérivées partielles de H

1. Cf Fig. 2
2. On traite le cas où $x \leq y$, le cas où $x \geq y$ se traitant de manière analogue.
On a : $\min(x, y) = x$; $\max(x, y) = y$ et $|x - y| = y - x$. D'où :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(x + y - |x - y|) &= \frac{1}{2}(x + y - (y - x)) \\ &= x \end{aligned}$$

De même :

$$\frac{1}{2}(x + y + |x - y|) = y$$

3. $(x, y) \mapsto |x - y|$ s'écrit sous la forme $g \circ f$ où $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par $f(x, y) = x - y$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par $g(t) = |t|$.
Les fonctions f et g étant continues sur leur domaine de définition, on en déduit que $(x, y) \mapsto |x - y|$ est continue sur \mathbb{R}^2 .
4. On distingue selon que $(x, y) \in T_1$ ou $(x, y) \in T_2$.
 - Si $(x, y) \in T_1$, alors

$$\begin{aligned} H(x, y) &= G_1(y, x) \\ &= (a - y)(b - x) \\ &= (a - \min(x, y))(b - \max(x, y)), \end{aligned}$$

puisque $x \geq y$.

- Si $(x, y) \in T_2$, alors

$$\begin{aligned} H(x, y) &= G_2(y, x) \\ &= (b - y)(a - x) \\ &= (b - \max(x, y))(a - \min(x, y)), \end{aligned}$$

puisque $x \leq y$.

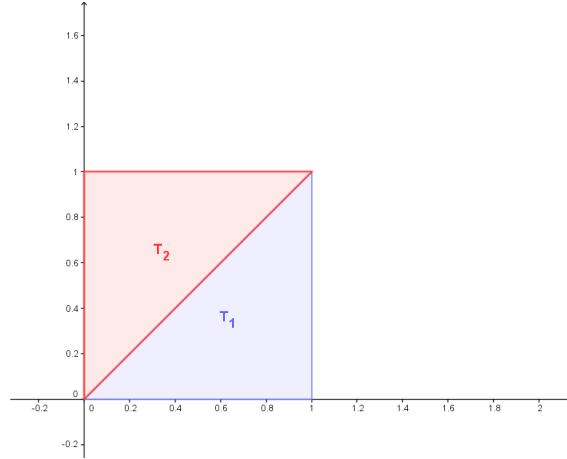


FIG. 2 – Ensembles T_1 et T_2 pour $a = 0$ et $b = 1$.

D'où le résultat. D'après la question précédente, on en déduit que H est continue sur P . De plus, $H \leq 0$ sur P puisque $a \leq \min(x, y) \leq b$ et $a \leq \max(x, y) \leq b$ si $(x, y) \in P$.

5. L'expression de H obtenue à la question précédente permet de dire que

- Sur $\overset{\circ}{T}_1$, la fonction H s'écrit :

$$H(x, y) = (a - y)(b - x).$$

Par conséquent H est polynomiale sur l'ouvert $\overset{\circ}{T}_1$ donc elle est de classe C^1 sur $\overset{\circ}{T}_1$.
Les dérivées partielles de H en $(x, y) \in \overset{\circ}{T}_1$ sont donc égales à

$$\frac{\partial H}{\partial x}(x, y) = y - a ; \quad \frac{\partial H}{\partial y}(x, y) = x - b.$$

- Sur $\overset{\circ}{T}_2$, la fonction H s'écrit :

$$H(x, y) = (a - x)(b - y).$$

Par conséquent H est polynomiale sur l'ouvert $\overset{\circ}{T}_2$ donc elle est de classe C^1 sur $\overset{\circ}{T}_2$.
Les dérivées partielles de H en $(x, y) \in \overset{\circ}{T}_2$ sont donc égales à

$$\frac{\partial H}{\partial x}(x, y) = y - b ; \quad \frac{\partial H}{\partial y}(x, y) = x - a.$$

Partie 2. Extrema de H

6. Pour tout $x \in]a, b[$,

$$H(x, x) = (x - a)(x - b).$$

La fonction $x \mapsto (x - a)(x - b)$ étant strictement négative sur $]a, b[$, on en déduit que $H(x, x) < 0$ pour tout $x \in]a, b[$.

7. (a) Soit $(x, y) \in P$. Alors : $(x, y) \in \partial P$ si et seulement si $x = a$ ou $x = b$ ou $y = a$ ou $y = b$. On trouve $H(x, y) = 0$ si $(x, y) \in \partial P$.
Puisque H prend des valeurs strictement négatives le minimum de H sur P ne peut être atteint sur ∂P .
- (b) On s'aperçoit que H ne possède pas de point critique ni sur $\overset{\circ}{T}_1$ ni sur $\overset{\circ}{T}_2$. Par conséquent, le minimum de H sur P n'est atteint ni sur $\overset{\circ}{T}_1$ ni sur $\overset{\circ}{T}_2$.
- (c) Le minimum de $x \mapsto H(x, x) = (x - a)(x - b)$ est atteint en $\frac{a+b}{2}$. De plus $H(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}) = -\frac{(b-a)^2}{4}$. D'où $H(x, x) \geq -\frac{(b-a)^2}{4}$ pour tout $x \in [a, b]$.
- (d) D'après les questions précédentes, le minimum est atteint uniquement sur la première bissectrice. Ce minimum est atteint en un seul point : le point de coordonnées $(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2})$.
8. Puisque $H \leq 0$ sur P et puisque $H = 0$ sur ∂P , on en déduit que $M = 0$.

Partie 3. Une équation différentielle

9. y vérifiant $y''(x) = f(x)$ pour tout $x \in [a, b]$, on trouve à l'aide d'une première intégration sur $[a, t]$ avec $t \in [a, b]$:

$$\forall t \in [a, b], y'(t) - y'(a) = \int_a^t f(s) ds.$$

Soit :

$$\forall t \in [a, b], y'(t) = y'(a) + \int_a^t f(s) ds.$$

En intégrant cette dernière égalité sur $[a, x]$ avec $x \in [a, b]$, on trouve :

$$\forall x \in [a, b], y(x) - y(a) = y'(a)(x - a) + \int_a^x \left(\int_a^t f(s) ds \right) dt.$$

Puisque $y(a) = 0$, on obtient finalement :

$$\forall x \in [a, b], y(x) = \lambda(x - a) + \int_a^x \left(\int_a^t f(s) ds \right) dt$$

avec

$$\lambda = f'(a).$$

10. L'intégrale itérée $\int_a^x \left(\int_a^t f(s) ds \right) dt$ s'obtient comme l'intégrale double sur le domaine (cf. Fig. 3)

$$T = \{(t, s) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq t \leq x, a \leq s \leq t\}$$

de la fonction $(t, s) \mapsto f(s)$ qui est continue sur T .

11. On s'aperçoit que T s'écrit également (cf. Fig.4 :

$$T = \{(t, s) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq s \leq x, s \leq t \leq x\}.$$

Le théorème d'intégration par tranches permet alors d'écrire :

$$\iint_T f(s) dt ds = \int_a^x \left(\int_s^x f(s) dt \right) ds.$$

D'où

$$\begin{aligned} \iint_T f(s) dt ds &= \int_a^x f(s) \left(\int_s^x dt \right) ds \\ &= \int_a^x (x - s) f(s) ds. \end{aligned}$$

Finalement, on trouve :

$$\forall x \in [a, b], y(x) = \lambda(x - a) + \int_a^x (x - s) f(s) ds.$$

12. D'après la question précédente, on a .

$$y(b) = \lambda(b - a) + \int_a^b (b - s) f(s) ds.$$

Puisque $y(b) = 0$, on obtient :

$$\lambda = -\frac{1}{b - a} \int_a^b (b - s) f(s) ds.$$

En remplaçant λ par l'expression trouvée, on obtient la forme cherchée de $y(x)$ pour $x \in [a, b]$.

13. Vérification fastidieuse que nous ne reproduisons pas en ces lignes.

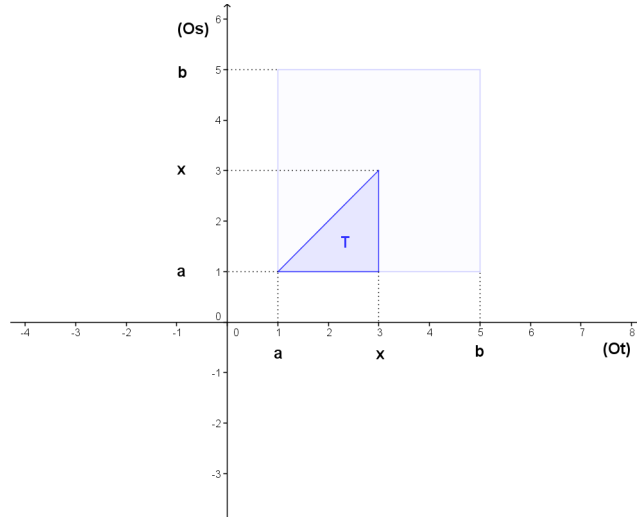


FIG. 3 – Domaine d'intégration T .

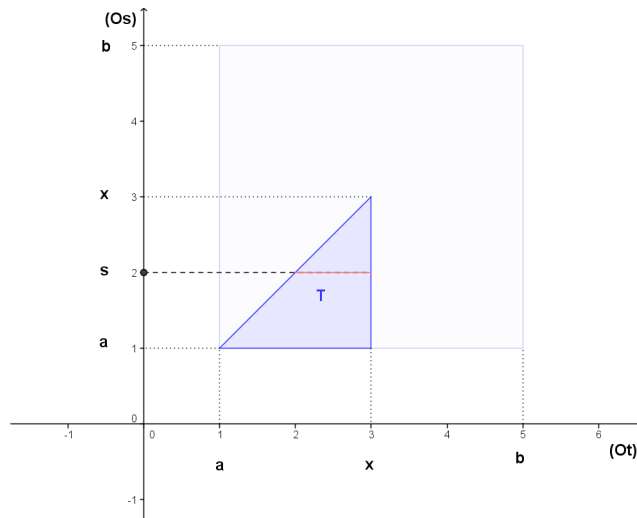


FIG. 4 – Intégration par tranches horizontales sur le domaine T .

14. On définit G sur P de la manière suivante :

$$G(s, x) = \begin{cases} G_1(s, x) & \text{si } (s, x) \in T_2, \text{ c.-à.-d. si } a \leq s \leq x \leq b \\ G_2(s, x) & \text{si } (s, x) \in T_1, \text{ c.-à.-d. si } a \leq x \leq s \leq b \end{cases}$$

La fonction ainsi définie est clairement continue sur $\overset{\circ}{T}_1$ et $\overset{\circ}{T}_2$. Quant à la continuité sur la première bissectrice, on peut l'obtenir grâce à la continuité séquentielle.

L'expression précédente de y peut alors se réécrire à l'aide de G sous la forme :

$$\forall x \in [a, b], y(x) = \int_a^x G(s, x) ds + \int_x^b G(s, x) ds.$$

Soit le résultat demandé en utilisant la relation de Chasles.