

NEUVIÈME DEVOIR SURVEILLÉ.

Fonctions de deux variables. Algèbre bilinéaire

Vous devez apporter un *soin particulier* à la *précision des calculs* ainsi qu'à la rigueur et la concision des *arguments avancés*. Toute incohérence dans les résultats obtenus sera sanctionnée par la perte de points.

Vous devez mettre en évidence les résultats obtenus en les *encadrant*. De manière générale, vous devez faire un effort tout particulier à la présentation de votre copie.

Si au cours de l'épreuve, vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-la sur sa copie et poursuivez votre composition en expliquant les raisons de vos prises d'initiative.

L'usage de la calculatrice et du rapporteur sont interdits. La présence du téléphone portable n'est pas tolérée.

EXERCICE DE CIRCULATION

Soit $I = [a, b]$ (avec $a < b$) un intervalle de \mathbb{R} et U un ouvert de \mathbb{R}^2 .

On considère $F : (x, y) \in U \mapsto \begin{pmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{pmatrix}$ un champ de vecteurs de classe \mathcal{C}^1 et γ un arc orienté du plan de paramétrage $t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, de classe \mathcal{C}^1 par morceaux sur I tel que $\gamma(I) \subset U$.

On rappelle que la circulation de F le long de γ , notée $\int_{\gamma} F$ se calcule par la formule :

$$\int_{\gamma} F = \int_{\gamma} (P(x, y) dx + Q(x, y) dy) = \int_a^b (P(\gamma(t))x'(t) + Q(\gamma(t))y'(t)) dt$$

1. **Question de cours.** On suppose que l'arc γ est fermé, sans point double, parcouru dans le sens trigonométrique et délimite un domaine G d'un seul tenant, inclus dans U .

Rappeler la formule de Green-Riemann permettant de calculer $\int_{\gamma} F$.

2. Dans cette question uniquement on prend $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y \geq 0 \text{ et } x^2 + y^2 \leq 1\}$ et pour γ l'arc frontière délimitant ce domaine, parcouru dans le sens trigonométrique.

(a) Représenter le domaine G et γ .

(b) Donner une paramétrisation de l'arc γ (on pourra décomposer en deux arcs γ_1 et γ_2 de classe \mathcal{C}^1) et en déduire directement $\int_{\gamma} F$ avec $P : (x, y) \mapsto -y$ et $Q(x, y) \mapsto x$.

(c) Retrouver le résultat précédent en utilisant la formule de Green-Riemann.

3. On suppose que les deux fonctions P et Q vérifient la propriété :

$$(\star) \text{ pour tout } (x, y) \in U, \quad \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial P}{\partial y}(x, y)$$

(a) Que vaut $\int_{\gamma} F$?

(b) Donner un exemple de champ de vecteurs F , non constant, et vérifiant la propriété (\star) .

(c) Rappeler la signification de la propriété :

($\star\star$) le champ F dérive d'un potentiel scalaire.

Donner un exemple de champ de vecteurs F , non constant, et vérifiant la propriété ($\star\star$).

(d) Quelle(s) relation(s) connaissez-vous entre les propriétés (\star) et ($\star\star$) ?

PROBLÈME 1. UN PRODUIT SCALAIRE SUR DES ESPACES DE FONCTIONS.

Etant donné $R = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ ($a < b$ et $c < d$), on note $\mathcal{C}^0(R, \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues de R vers \mathbb{R} et on définit pour toutes fonctions $f, g \in \mathcal{C}^0(R, \mathbb{R})$ la quantité :

$$\varphi(f, g) = \iint_R f(x, y)g(x, y) \, dx dy.$$

Nous admettons le résultat suivant :

Si $f \in \mathcal{C}^0(R, \mathbb{R})$ est positive et $\iint_R f(x, y) \, dx dy = 0$ alors f est identiquement nulle sur R .

Nous rappelons également l'égalité pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$:

$$\cos(u) \cos(v) = \frac{\cos(u+v) + \cos(u-v)}{2}$$

Les parties I et II sont indépendantes.

Question préliminaire

1. Démontrer que φ définit un produit scalaire sur $\mathcal{C}^0(R, \mathbb{R})$. On note désormais : $(f|g) = \varphi(f, g)$.

Partie I

Dans cette partie $R = [0, 1] \times [0, 1]$ et on considère les fonctions de $\mathcal{C}^0(R, \mathbb{R})$:

$$f_0 : (x, y) \mapsto 1, \quad f_1 : (x, y) \mapsto x, \quad f_2 : (x, y) \mapsto y$$

On note F le sous-espace de $\mathcal{C}^0(R, \mathbb{R})$ engendré par (f_0, f_1, f_2) .

2. Montrer que (f_0, f_1, f_2) est une famille libre et en déduire $\dim F$.
3. Parmi les vecteurs f_0, f_1 et f_2 lesquels sont unitaires ?
4. Calculer les produits scalaires suivants : $(f_0|f_1)$, $(f_0|f_2)$ et $(f_1|f_2)$. La famille (f_0, f_1, f_2) est-elle orthogonale ?
5. Appliquer le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt pour former une base orthonormée de F .

Partie II

On fixe un entier positif n . Dans cette partie $R = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ et on considère les fonctions de $\mathcal{C}^0(R, \mathbb{R})$:

$$\forall (k, l) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad e_{k,l} : (x, y) \mapsto \frac{1}{\pi} \cos(kx) \cos(ly).$$

6. Soit $(k_1, k_2) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ montrer que

$$\int_0^{2\pi} \cos(k_1 x) \cos(k_2 x) \, dx = \begin{cases} a & \text{si } k_1 = k_2 ; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

avec $a \in \mathbb{R}$ que l'on précisera.

7. Pour tout $(k_1, l_1) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ et tout $(k_2, l_2) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ calculer le produit scalaire $(e_{k_1, l_1} | e_{k_2, l_2})$. Que peut-on en déduire pour la famille $\mathcal{E}_n = (e_{k, l})_{(k, l) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$?
8. On note $E = \text{Vect}(\mathcal{E}_n)$ le sous-espace de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Déterminer la dimension de E .
9. Soit l'application Δ définie pour toute fonction f de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^2 par

$$\Delta f : (x, y) \mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)$$

- (a) Montrer que Δ induit un endomorphisme sur E . Dans la suite on note toujours Δ cet endomorphisme.
- (b) Ecrire la matrice de Δ dans une base bien choisie de E (vous préciserez bien la manière d'énumérer les éléments de cette base).
- (c) En déduire le rang de Δ puis résoudre dans E l'équation $\Delta f = 0$.

PROBLÈME 2. RÉOLUTION INTÉGRALE D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE

Notations

Soit $P = [a, b] \times [a, b]$. On note ∂P le bord de P .

On définit les ensembles suivants de \mathbb{R}^2 :

$$T_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq y \leq x \leq b\}.$$

$$T_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq y \leq b\}.$$

$$\overset{\circ}{T}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a < y < x < b\}.$$

$$\overset{\circ}{T}_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a < x < y < b\}.$$

On définit sur \mathbb{R}^2 les fonctions G_1 et G_2 par :

$$G_1(s, t) = (s - a)(t - b).$$

$$G_2(s, t) = (s - b)(t - a).$$

On définit la fonction H sur P par :

$$H(x, y) = \begin{cases} G_1(y, x) & \text{si } (x, y) \in T_1 \\ G_2(y, x) & \text{si } (x, y) \in T_2 \end{cases}$$

Partie 1. Continuité et dérivées partielles de H

1. Représenter graphiquement T_1 et T_2 .
2. Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\min(x, y) = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|) \text{ et } \max(x, y) = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|).$$

3. Montrer que $(x, y) \mapsto |x - y|$ est continue sur \mathbb{R}^2 . En déduire que $(x, y) \mapsto \min(x, y)$ et $(x, y) \mapsto \max(x, y)$ sont continues sur \mathbb{R}^2 .
4. Montrer que pour tout $(x, y) \in P$,

$$H(x, y) = (a - \min(x, y))(b - \max(x, y)).$$

En déduire que H est continue sur P et le signe de H sur P .

5. Montrer que H est de classe \mathcal{C}^1 sur $\overset{\circ}{T}_1$ et sur $\overset{\circ}{T}_2$. Calculer les dérivées partielles de H sur $\overset{\circ}{T}_1$ et $\overset{\circ}{T}_2$.

Partie 2. Extrema de H

On admet le résultat suivant : Une fonction φ continue sur P à valeurs réelles a pour image un segment. En particulier φ admet un minimum et un maximum.

Soient m et M les minimum et maximum respectivement de H sur P . On se propose de déterminer m et M .

6. Déterminer le signe de $H(x, x)$ pour $x \in]a, b[$. En déduire que m est strictement négatif.
7. Soit $(\alpha, \beta) \in P$ tel que $f(\alpha, \beta) = m$.
 - (a) (α, β) peut-il appartenir à ∂P ? Justifier.
 - (b) De même, (α, β) peut-il appartenir à $\overset{\circ}{T}_1$ ou à $\overset{\circ}{T}_2$? Justifier.
 - (c) Montrer que pour tout $x \in [a, b]$, $H(x, x) \geq -\frac{(b-a)^2}{4}$.
 - (d) En déduire m et que H atteint m en un unique point $(\alpha, \beta) \in P$ que l'on précisera.
8. Déterminer M .

Partie 3. Une équation différentielle

Étant donnée $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$, on veut déterminer $y \in \mathcal{C}^{(2)}([a, b], \mathbb{R})$ vérifiant

- $\forall x \in [a, b], y''(x) = f(x)$;
- $y(a) = y(b) = 0$.

9. Montrer que si y vérifie les conditions, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel y s'écrive :

$$\forall x \in [a, b], y(x) = \lambda(x - a) + \int_a^x \left(\int_a^t f(s) ds \right) dt$$

10. Montrer que $\int_a^x \left(\int_a^t f(s) ds \right) dt$ est égale à $\iint_T f(s) dt ds$ où T est un domaine que l'on précisera.

11. En déduire que y s'écrit :

$$\forall x \in [a, b], y(x) = \lambda(x - a) + \int_a^x (x - s) f(s) ds.$$

12. En déduire que y s'écrit :

$$\forall x \in [a, b], y(x) = -\frac{x-a}{b-a} \int_a^b (b-s) f(s) ds + \int_a^x (x-s) f(s) ds.$$

13. Établir que y s'écrit :

$$\forall x \in [a, b], y(x) = \frac{1}{b-a} \left(\int_a^x G_1(s, x) f(s) ds + \int_x^b G_2(s, x) f(s) ds \right).$$

14. Conclure que y s'écrit sous la forme

$$\forall x \in [a, b], y(x) = \frac{1}{b-a} \int_a^b G(s, x) f(s) ds$$

où G est une fonction définie et continue sur P et que l'on explicitera.